Enc.
18
16, 113

Bibliothek.
Enc. 18. (16,1/3
<366153463200018
<366153463200018
Bayer. Staatsbibliothek

Der
Mathematiker,
oder
Compendiöse Bibliothek
des
Wissenswürdigsten
aus der
Größenlehre.

Heft I — III.

Ladenpreis 18 ggl.

Eisenach und Halle,
bey Johann Jacob Gebauer,
1796.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Kurze Uebersicht der Folge-Ordnung,

nach welcher theils die verschiedenen Theile der Mathematik in der compendiösen Bibliothek überhaupt und in gegenwärtiger Abtheilung insbesondere abgehandelt, und nach welcher, wenn erst die hier unentbehrlichen Grundlagen systematisch vollendet, dann vornehmlich nach der Haupt-Idee des Plans die Auszüge geliefert werden sollen.

Mathematik.

I. Ueberhaupt.

A. Die Wissenschaft selbst nach ihrem Begriff, ihren Theilen und Methoden.

B. Geschichte der Wissenschaft und berühmter Mathematiker.

II. Einzelner Theile.

A. Reine Mathematik.

AA. Ueberhaupt.

BB. Besonders.

a. Arithmetik.

aa) Die allgemeine.

bb) Die besondre.

1. Zahlenrechnung oder gemeine Arithmetik.
(Nach dem Bedürfniß vieler Nicht-Mathematiker ist für diese eine eigne Abtheilung dieser Bibliothek, nämlich die XVte, betitelt: Der Arithmetiker, bestimmt.)
2. Buchstabenrechnung.

b. Geometrie.
aa) Ueberhaupt.
bb) Insbesondre.
1. Euklidische Geometrie.
2. Trigonometrie.
3. Höhere Geometrie.
α. Analysis überhaupt.
β. Insbesondre.
a) Analysis finitorum.
b) — — infinitorum.

B. Angewandte Mathematik.

AA. Angewandte Arithmetik.
aa) Oeconomische Rechenkunst.
bb) Zinsrechnung.
cc) Forstrechnungskunst.
dd) Bergmännische Rechenkunst.
ee) Kaufmännische Rechenkunst.
ff) Cameralstaats-Rechenkunst.
gg) Anwendung auf psychologische Gegenstände, z. B. die Rechnung des Wahrscheinlichen.

Anmerkung. Diese verschiednen Zweige der angewandten Rechenkunst werden in mehreren Abtheilungen der Bibliothek, z. B. im Technologen, Kaufmann, Weibe, Staatsmann, Arithmetiker,

nach dem Bedürfniß dieser Stände besonders bearbeitet werden. Hier im Mathematiker sollen aber die Gründe und Gesetze des jedesmaligen Verfahrens allgemein faßlich entwickelt werden.

BB. Angewandte Geometrie.

aa) Feldmeßkunst.
bb) Practische Stereometrie.
cc) Oeconomische und kaufmännische Meßkunst.
dd) Forstgeometrie.
ee) Bergmännische Geometrie.

Anmerkung. Hier gilt zum Theil wieder die obige Anmerkung.

CC. Statische Wissenschaften.

A. Statik und Mechanik der festen Körper.
B. — — — — flüssigen Körper.
a. Hydrostatik.
b. Aerometrie.
c. Hydraulik.

Anmerkung. Das Practische dieser Wissenschaften wird vorzüglich in der XIVten Abtheilung dieser Bibliothek, betitelt: Der Physiker, zu suchen seyn.

DD. Optische Wissenschaften.

a. Optik.
b. Dioptrik.
c. Catoptrik.
} Siehe vornemlich den Physiker.
d. Perspectiv.

EE. Astronomische Wissenschaften.

Siehe die XVIIte Abtheil. dieser Bibliothek, betitelt: Der Astronom.

FF. Architectonische Wissenschaften.

S. die IIte, IVte, Xte und XVIIIte Abtheil. dieser Bibliothek, oder den Technologen, Künstler, Soldat und Baumeister.

Verbesserungen, Zusätze, wichtige, kurze Original-Aufsätze und interessante Correspondenz-Nachrichten werden mit größtem Danke angenommen vom Herausgeber.

Eisenach,
im October 1795.

Andre.

I.

A. Vorkenntnisse vom Begriff der Mathematik, den verschiedenen Theilen dieser Wissenschaft, ihren Gränzen, und der ihr eigenthümlichen Methode.

1. Warum studirt man Mathematik?

Man pflegt die Mathematik aus einem doppelten Grunde zu studiren. Einmal, weil sie die Größen der Dinge finden lehrt, und dann, weil sie durch die wissenschaftliche Methode, nach welcher die ihr zugehörigen Lehren abgehandelt werden, die beste Uebung im Denken, Urtheilen und Schließen verschafft. Hier lernt man am gründlichsten einsehen, was dazu gehört, etwas gewiß zu wissen, oder es blos als wahrscheinlich anzusehen. Hier bietet sich die beste Gelegenheit dar, einen nützlichen Gebrauch von erworbenen Kenntnissen zu machen, und sich im Erfinden unbekannter, aber mit jenen Kenntnissen im nahen Zusammenhang stehender Wahrheiten zu üben.

2. Ursprung des Namens Mathematik.

Aus diesem Grunde hat man auch der Mathematik ihren Namen nicht von der Größe, welches der

der eigentliche Gegenstand ihrer Beschäfftigung ist, sondern von einem griechischen Worte, welches soviel als Unterweisen, Lernen, Erkennen bedeutet, gegeben, und die alten griechischen Weltweisen hielten keinen ihrer Schüler für tüchtig, die höheren Studien zu treiben, wenn er nicht durch das Studium der Mathematik dazu vorbereitet war.

3. Begriff der Größe.

Ehe wir aber von dieser so gepriesenen Methode nähere Kenntniß geben, wird es nöthig seyn, durch die Zergliederung des Worts Größe, den Begriff und Umfang der Wissenschaft selbst zu bestimmen. Unter Größe begreift man alles, was einer Vermehrung und Verminderung fähig ist; vermehrt wird eine Größe, wenn ihr noch etwas von der Art, woraus sie bereits besteht, zugesetzt; vermindert aber, wenn ihr etwas dergleichen genommen wird. So vermehrt man z. B. sein Vermögen durch neuen Erwerb, und vermindert es durch einen daran erlittenen Verlust.

4. Meßbare Größen.

Soll indessen die Größe meßbar gemacht werden, so daß man ihr Verhältniß zu einer andern erkennen kann, so muß man sich dieselbe als eine Anhäufung von irgend Etwas, welches man die Einheit in ihr nennt, vorstellen. Die mehrern in einer Größe angenommenen Einheiten, die 100 oder 1000 Häuser, welche etwa eine ganze Stadt ausmachen, nennt man ihre Theile, und zwar integrirende, zum Unterschied anderer, die bey manchen Größen vorkommen, hieher aber nicht gehören. Von solchen Theilen nimmt man an, daß sie alle von einerley Art sind, und sich in nichts von einander unterscheiden; sie sind gleichsam nur ein einziges mehr-

mals

mals gedachtes oder vorhandenes Ding. Nach der Menge solcher Theile bestimmt sich der mathematische Werth einer Größe. In der Natur treffen wir nun zwar bey den zu einer irgendwo vorhandenen Größe gehörigen Theilen niemals eine solche vollkommene Gleichartigkeit an, allein man nimmt doch beym mathematischen Gebrauch keine Rücksicht darauf. Z. B. wenn ich zehn Thaler vor mir habe, so kann ich zwar gar manches an dem einen entdecken, was ich an einem andern nicht finde, allein so bald ich sie als eine auszuzahlende Geldpost ansehe, mache ich keinen Unterschied unter ihnen.

5.

Es können aber auch in vieler andern Rücksicht ungleichartige Theile eine meßbare Größe ausmachen. Denn bekanntlich kommen alle auch noch so verschiedene Gegenstände unserer Betrachtung doch zuletzt darin überein, daß sie Dinge, oder Wesen, oder wenigstens ein Etwas sind. Unter diese allgemeinsten Begriffe bringt man indessen die Theile einer Größe nicht jedesmal, sondern nur alsdenn, wenn sie sich nicht unter einen niedrigern bringen lassen. So können z. B. 3 Ducaten und 2 Laubthaler als 5 Münzen, 4 Folianten und 6 Quartanten als 10 Bände angesehen werden, ohne daß man sie braucht 10 Dinge zu nennen.

6. Auch die Einheiten sind theilbar.

Aber nicht blos die Größe als Aggregat von Einheiten, sondern auch die Einheit selbst ist theilbar, und man nennt alsdenn eine solche weiter eingetheilte Einheit eine höhere, zum Unterschied der neuen Einheiten, welche niedrige heißen; z. B. der Groschen als höhere Einheit wird in 12 Pfennige, als so viel niedrigere Einheiten, getheilt. Solche Theil-

chen einer niedrigern Art nennt man auch Bruchstücke von der höhern Einheit. Die Menge solcher Bruchstücken hat keine Grenzen, und jede solche niedrigere, auch noch so kleine Einheit kann wieder so weit getheilt werden, als man will. Kurz, man kann in der Mathematik bis ins Unendliche theilen. Beym practischen Gebrauch pflegt man indessen einmal bey einer gewissen Einheit stehen zu bleiben, und vor der Hand auf keine weitere Theilung bey ihr Rücksicht zu nehmen, auch sich von der Größe einer solchen Einheit durch sinnliche Empfindung einen Begriff zu machen, z. B. von der Größe eines Fußes, einer Secunde, eines Pfennigs u. s. w. Hat man nun einmal Kenntniß durch die Sinne von einer solchen Einheit, so können alle höheren und niedern durch bloße Vergleichungen kenntlich gemacht werden. Z. B. daß eine Ruthe aus 10 Fußen, oder ein Zoll aus dem 10ten Theil eines Fußes besteht.

7. Unterbrochne und stetige Größen.

Die Art und Weise, wie die Theile einer Größe bey einander sind, giebt Anlaß, daß man die Größen entweder als unterbrochen, oder als stetige betrachtet. Bey den erstern sind die Theile durch sich selbst alle von einander zu unterscheiden, wie z. B. die Bände bey einer Bibliothek. Bey den letztern hingegen ist allemal das Ende des einen Theils zugleich auch als der Anfang des folgenden anzusehen, und man kann die Grenzen derselben gleichsam annehmen, wie und wo man will; dafür ist nun aber auch die Lage und Verbindung aller Theile bey einer stetigen Größe durchaus bestimmt, welches bey der unterbrochnen nicht der Fall ist. Beyspiele von stetigen Größen sind die Linien, Flächen und Körper.

8. Das

8. Das Messen unterbrochner Größen.

Die unterbrochenen Größen drückt man durch Zahlen aus, oder ihr Werth wird durch die Menge oder Anzahl ihrer Einheiten bestimmt. In dieser Rücksicht nennt man auch die Einheit einen Maaßstab, und die Untersuchung, wie vielmal der Maaßstab in der zu bestimmenden Größe enthalten ist, das Messen. In wiefern nun mehrere kleinere Einheiten wieder als eine einzige größere angesehen werden, kann es auch Maaßstäbe geben, die aus andern von niederer Art zusammengesetzt sind. Es kann Maaßstäbe geben, die aus unterbrochenen, und die aus stetigen Größen bestehen.

9. Arithmetik.

Der Theil von der Größenlehre, welcher sich mit Betrachtung der Zahlen, und was damit in Verbindung steht, beschäfftigt, wird die Arithmetik oder Rechenkunst genennt. Die Zahlen drückt man durch sogenannte Ziffern aus, wenn sie bestimmte Mengen von Einheiten enthalten. Will man hingegen Untersuchungen anstellen, wo blos von Zahlen überhaupt die Rede ist, ohne darauf zu sehen, aus wie vielen Einheiten sie eben bestehen, so bedient man sich dazu der Buchstaben. Daher unterscheidet man auch in der Arithmetik die Ziffern- und Buchstabenrechnung. Mittelst der erstern können blos einzelne Fragen beantwortet werden; mittelst der letztern aber entdeckt man allgemeine Wahrheiten, aus welchen sich Regeln für ganze Gattungen von Rechnungsaufgaben herleiten lassen. So läßt sich z. B. mittelst der Buchstabenrechnung zeigen, daß zwey unbekannte Zahlen, von welchen die Summe und der Unterschied bekannt ist, gefunden werden können, wenn man sowohl die gegebne Summe als den Unterschied halbirt,

und diese Hälften einmal zusammennimmt, und das anderemal die kleinere von der größern abzieht. Im erstern Fall erhält man nämlich die größern, und im letztern die kleinern von den vorhin unbekannten Zahlen.

10. Entgegengesetzte Größen.

Bey dieser Art von Rechnung wird man aufs neue zu einer Eintheilung der Größen veranlaßt, die aus dem Begriff vom Gegensatz hergeleitet wird. Größen nemlich, welche solchen Dingen beygelegt werden, welche entgegengesetzte Bestimmungen haben können, werden davon entgegengesetzte genennt, und man theilt sie in bejahende und verneinende, oder in positive und negative ein. Z. B. bey dem Raum kann man Hohes und Tiefes, Rechtes und Linkes, Vorderes und Hinteres einander entgegensetzen; eine Summe Geldes kann man als Vermögen und als Schuld betrachten, und so sind 10 Rthlr. Schulden die entgegengesetzte, übrigens gleiche, Größe von 10 Rthlr. Vermögen. Wenn man also das Vermögen bejahend nennt, welches willkührlich ist, so kann man die Schulden ein verneinendes Vermögen nennen; und so ist hinwiederum das Vermögen eine verneinende Schuld, wenn man die Schuld als etwas bejahendes ansieht. Für solche Arten von Größen sind deshalb auch besondere Zeichen, die unter den Namen von Plus und Minus bekannt sind, eingeführt worden.

11. Analysis.

Man sieht, daß es bey solchen Rechnungen vornemlich auf eine Entwickelung der Begriffe, sowohl von Seiten desjenigen, was gegeben ist, oder als bekannt angesehen wird, als auch dessen, was unbekannt ist und gesucht wird, ankommt. Bey solchen

chen Entwickelungen bieten sich dann dem in diese Rechenkunst eingeweihten denkenden Kopfe vermöge des Schließens allerley Mittel dar, welche bald oder spät zum vorgesteckten Ziele führen. Man hat ihr aus diesem Grunde den Namen der Analysis beygelegt, welche sich wieder in die Analysis des Endlichen und des Unendlichen theilt, je nachdem in ihr begrenzte, oder unendlich wachsende und unendlich abnehmende Größen behandelt werden.

12. Gleichungen. Algebra.

Das äußerliche, gleichsam mechanische Verfahren, welches bey solchen analytischen Rechnungen beobachtet wird, besteht darin, daß man aus den Umständen der Aufgabe eine oder mehrere Gleichungen bildet, d. i. einerley Werth auf zwey verschiedene Arten ausdrückt, so daß in diesen Ausdrückungen sowohl die bekannten als unbekannten Größen unter einander gemengt vorkommen. Diese Gleichungen verwandelt man nun nach gewissen Vorschriften mit Anwendung verschiedener Grundsätze so lange in andere, bis man auf einer Seite des Gleichheitszeichens lauter bekannte Größen hat, auf der andern Seite aber die unbekannte Größe nur allein vorkommt. Diese Behandlungsart wird die Algebra genannt, und eine auf solche Art vorgenommene Analysis eine algebraisch-analytische Rechnung.

13. Differential- und Integral-Rechnung.

Bey der Analysis des Unendlichen wird man auf die Betrachtung der sogenannten Differentialen geleitet. Dieses sind bey den veränderlichen Größen, z. B. den krummen Linien, die allmählichen Zusätze oder Abnahmen, durch welche die Veränderungen in einer unendlich kleinen Zeit geschehen; sie sind deshalb selbst kleiner als jede angebliche Größe, werden als ver-

verschwindend betrachtet, und der Null gleichgesetzt. Man hat für sie eben so bestimmte Rechnungsarten, wie für die endlichen Größen. Diese und die gehörige Anwendung derselben wird die Differentialrechnung genannt. Bestimmt man aus einem Differentialausdruck rückwärts wieder die ganze, itzt differentiirt vorhandene Größe, so nennt man dieses die Integralrechnung, und den gefundenen Werth selbst das Integral.

14. Höhere Arithmetik und Mathematik.

Rechnungen, wie sie bey der Analysis und Algebra vorkommen, machen den Gegenstand der höhern Arithmetik aus; und überhaupt nennt man dasjenige höhere Mathematik, wo solche Rechnungen gebraucht werden. Sie erheben den menschlichen Geist zu einer Höhe, wofür ihm oft zu schwindeln beginnt; und, weit gefehlt, daß er nun am Ziele wäre, befindet er sich vielmehr jetzt erst auf einem Standpuncte, wo er das Unermeßliche, Grenzenlose, welches noch zu durchfliegen ist, desto ungehinderter durchschauen kann.

15. Geometrie.

Der Analysis sind zwar die stetigen Größen so gut wie die unterbrochenen unterworfen; allein in wiefern mit denselben gerechnet wird, nehmen sie doch die Natur der unterbrochenen an. Die eigentliche Behandlung der stetigen Größen macht die Geometrie oder Erdmeßkunst aus. Man theilt auch diese in die höhere und niedere, oder Elementar-Geometrie. Diese letztere begreift blos diejenigen Größen in sich, welche durch Lineal und Cirkel dargestellt werden können. Die Betrachtung der andern krummen Linien, Flächen und Körper aber gehört zur höhern Geometrie. Man unterscheidet auch eine be-

sondere

sondere geometrische Analysis, in welcher vorzüglich die alten Mathematiker große Meister waren.

16. Extensive, intensive, protensive Größen.

Bey den so eben betrachteten Größen liegt das Mehrere, was ihnen zugehört, außer einander, und ist insgesammt gegenwärtig. Man nennt sie in diesem Betracht extensive oder ausgedehnte. Sind aber die ihnen zugehörigen Theile mehr in einander enthalten, so daß mit der Größe nicht auch der Raum, den sie einnimmt, zu wachsen oder abzunehmen braucht, so nennt man sie intensive; wie z. B. Wärme, Kälte, Verstand, Edelmuth ꝛc. Auch hier ist das Mehrere zugleich gegenwärtig. Sind endlich bey einer Größe die Theile zwar außer einander, aber nicht zugleich gegenwärtig, sondern folgen auf einander, so nennt man sie protensiv, dahin gehören alle Zeiträume.

17.

Die Ausmessung der extensiven Größen ist es bisher noch fast allein gewesen, womit sich die Mathematik beschäfftigt hat. Bey den intensiven hat die Messung vornemlich deshalb Schwierigkeiten, weil man keinen Maaßstab für sie ausfindig machen kann, welcher als allgemein-verständlich anzusehen wäre. Hätte man ihn aber auch gefunden, so würde doch nun seine Anwendung wieder neue Schwierigkeiten haben. Die protensiven Größen werden auf eben den Fuß behandelt, wie die unterbrochenen extensiven, denn die Zeittheile lassen sich wie die durch Zahlen ausgedrückten Raumtheile betrachten, indem das zugleich oder nach und nach Beyeinanderseyn für die mathematische Betrachtung keine Verschiedenheit giebt.

18. Tri-

18. Trigonometrie.

Man hat einige Lehren der Rechenkunst auf gewisse Gegenstände der Geometrie, des häufigen Gebrauchs und der großen Gemeinnützigkeit wegen, besonders angewandt, und eigne Wissenschaften daraus gemacht. Dahin gehört vornemlich die Dreyecksmeßkunst oder Trigonometrie, wo aus dreyen wesentlichen Stücken eines Dreyecks die übrigen durch Rechnung bestimmt werden. Man theilt sie in die ebene und sphärische. Die erstere betrachtet solche Dreyecke, welche auf einer Ebne verzeichnet sind; letztere hingegen solche, die an einer Kugelfläche von Bögen größter Kreise dieser Kugel eingeschlossen sind.

19.

Man hat zwar auf ähnliche Art auch eine Tetragonometrie für die Vierecke, so wie eine Polygonometrie für die Vielecke überhaupt entworfen, allein der Gebrauch derselben ist bey weitem nicht so ausgebreitet, wie der von der Trigonometrie. Weil auch jede mehr als dreyseitige Figur durch Diagonalen in dreyseitige getheilt werden kann, so läßt sich selbst bey den Vielecken das Unbekannte mittelst trigonometrischer Berechnungen erhalten. Beyspiele hievon geben unter andern die Messungen der Meridiangrade.

20. Reine und angewandte, allgemeine und besondre Mathematik.

So lange sich nun die Mathematik blos mit den Größen, als solchen, abgiebt, und auf nichts weiter bey ihnen, als auf ihre Vermehrung, Verminderung, und die Art der Zusammenordnung ihrer Theile sieht, nennt man sie die reine Mathematik (mathesis pura). So bald aber auch noch auf andre Eigenschaften der Größen mit Rücksicht genommen, oder die

die Lehren der reinen Mathematik auf die in der Welt vorkommenden Gegenstände angewandt werden, nennt man sie die angewandte Mathematik (mathesis applicata). So gehört z. B. die Betrachtung der geraden Linien in die reine, die Betrachtung des Hebels oder Lichtstrahls aber, die man sich übrigens auch als gerade Linien vorstellt, in die angewandte Mathematik; ähnliche Bewandtniß hat es mit einem Kreis und dem Rad an der Welle, mit einem Dreyeck und einem Keil u. s. w. Derjenige Theil der reinen Mathematik, welcher die möglichen Verknüpfungen der aus gleichartigen Theilen bestehenden Größen untersucht, durch welche eine Größe überhaupt erzeugt werden kann, folglich von der verschiedenen Beschaffenheit der Größen gänzlich abstrahirt, heißt die allgemeine Größenlehre (mathesis universalis); diejenige hingegen, welche Größen von besonderer Eigenschaft zum Gegenstande hat, die besondere (mathesis specialis). Jene ist also die Grundlage sowohl von dieser, als der ganzen angewandten Mathematik. Es besteht aber die allgemeine Größenlehre, außer der allgemeinen Zusammensetzung und Trennung der Theile einer Größe, blos in der Zahlenwissenschaft, oder Arithmetik.

21. Practische Mathematik.

Schon in der reinen Mathematik, und zwar sowohl in der Arithmetik als Geometrie, auch Trigonometrie, kommen allerley Anwendungen der daselbst entwickelten Sätze vor. Man rechnet sie aber nicht mit zur angewandten, sondern begreift sie unter dem Namen der practischen Mathematik. Z. B. die kaufmännische, öconomische und politische Rechenkunst, das Buchhalten, die Feldmeßkunst oder Geodäsie, das Wasserwägen, die Markscheidekunst, oder unterirdische Geometrie. Diese untergeordneten Wissenschaften scheinen sich in so fern

von

von der eigentlich angewandten Mathematik zu unterscheiden, daß man bey ihren Gegenständen keine physicalische Erfahrungen oder Versuche mit zu Hülfe zu nehmen braucht, sondern blos den Größen bestimmte Namen unterlegt.

22. Allgemeine Mechanik, Dynamik, Phoronomie.

Die angewandte Mathematik kann sich auf alles erstrecken, was irgend in der Natur meßbares vorkommt. Um nun nicht zu vielerley unter einander zu mengen, hat man diese Gegenstände unter gewisse Classen gebracht. Die ausgedehnteste von denselben begreift die Kräfte der Körper in sich, und macht die Mechanik im weitesten Sinne des Worts aus. In wiefern aber wieder von Kräften besonders die Rede ist, hat man die Dynamik, und wo man auf die von solchen Kräften hervorgebrachten Bewegungen Rücksicht nimmt, die Phoronomie.

23. Statik und besondre Mechanik.

Wenn verschiedene Körperkräfte auf einander wirken sollen, so muß man sie mit einander in Verbindung bringen. Dieses geschieht entweder durch unmittelbare Berührung, oder vermittelst gewisser Werkzeuge, die man unter dem Namen der Maschinen begreift. Die erstere Art leitet auf die Gesetze des Stoßes, welche bey den harten und weichen Körpern etwas anders als bey den elastischen sind. Die letztere Art hat der Statik und Mechanik im engern Sinn den Ursprung gegeben; jener, in wiefern man blos auf die Gesetze des Gleichgewichts, und dieser, in wiefern man auf Ueberwucht und daraus entstehende Bewegung Rücksicht genommen hat.

24. Mechanik im weitern Sinne.

Man kann bey den Bewegungen die geradlinigten von den krummlinigten, und bey den letztern wieder die kreisförmigen von den schwingenden unterscheiden. Die erstere komt am meisten beym Stoß; die zweyte bey vielen Maschinen und den Weltkörpern; die dritte beym Pendel, beym Schall, und vielleicht auch bey Licht, bey der Wärme und Electricität vor. Alle diese Lehren umfaßt die Mechanik im weitern Sinne des Worts.

25. Hydrodynamik. Hydrostatik. Hydraulik. Pnevmatik. Aërostatik. Aërometrie.

Dies gilt indeß nur von festen Körpern, deren Theile nemlich mit einer solchen Kraft zusammenhängen, daß die Bewegung des einen ihrer Theile eine ähnliche Bewegung aller übrigen zur unmittelbaren Folge hat. Die flüssigen Körper folgen bey ihren Bewegungen andern Gesetzen. Man unterscheidet hier wieder die tropfbar-flüssigen von den elastisch-flüssigen. Die Gleichgewichts- Bewegungsgesetze der erstern machen die Hydrodynamik, Hydrostatik und Hydraulik; die der letztern aber die Pnevmatik, Aerostatik und Aerometrie aus.

26. Messung des Lichts und seiner Erscheinungen.

Nächst den Kräften kann man das Licht als die allgemeinste Erscheinung in der Natur ansehen, wo sich die Meßkunst anbringen läßt. Die Ausflüsse desselben lassen sich auf ähnliche Art, wie bey den Kräften, als gerade Linien darstellen, die unter mancherley Winkeln zusammengeordnet sind. Man nennt sie Strahlen, und diese werden entweder in ihrer geraden Richtung, oder im Zustande eines Rückpralls, oder in einer gewissen Ablenkung, wo man sie gebrochen nennt, betrachtet.

27. Photometrie. Optik. Catoptrik. Dioptrik.

Die Gesetze des Lichts, wo blos geradlinigte Strahlen betrachtet werden, sind der Gegenstand der Photometrie und Optik, wo Lichtstärke, scheinbare Größe der Gegenstände, selbst Lichtmangel oder Schatten u. dergl. betrachtet wird. Gleichförmige Abprellungen der Lichtstrahlen von glatten undurchsichtigen Flächen bringen die Bilder der Gegenstände in den Spiegeln hervor, und die Wissenschaft hievon führt den Namen Catoptrik. Durch das Brechen der Lichtstrahlen können die Gegenstände, von welchen sie herkommen, scheinbar emporgehoben, vergrößert, verkleinert, oder näher herbeygezogen, vorgestellt werden. Diese und andere Modificationen der Lichtstrahlen machen die Dioptrik aus.

28. Perspective.

Endlich kann man auch die Puncte betrachten, wo Lichtstrahlen, die von einem Gegenstande nach dem Auge fahren, eine zwischen beiden gestellte Ebne treffen. Die Zusammenordnung dieser Puncte geben die perspectivische Vorstellung von dem Gegenstande, und die Wissenschaft, solche Puncte auf der Ebne, oder der Tafel, wie man sie hier nennt, entweder durch Rechnung oder Zeichnung zu bestimmen, wird die Perspectiv genannt.

29. Astronomie. (Astrologie.)

Mittelst des Lichts gelangen wir auch zur Kenntniß der himmlischen Körper. Die wissenschaftliche Betrachtung derselben ist wegen genauer Eintheilung der Zeit und des Raums auf der Erdfläche für uns von der größten Wichtigkeit. Man ist deshalb schon in den ältesten Zeiten bemüht gewesen, ihre Größe, Entfernung und Bewegungsgesetze zu bestimmen, und

die Wissenschaft, wo dieses geschieht, heißt die Sternkunde oder Astronomie. Man muß dieselbe von einer ähnlichen, itzt aber mit Recht verrufenen Wissenschaft, der Sterndeuterkunst oder Astrologie, unterscheiden, wo man aus willkührlichen Voraussetzungen, Einflüsse der himmlischen Körper, je nachdem sie sich in dieser oder jener Zusammenstellung befinden, auf Fruchtbarkeit, Gesundheit, und andere Schicksale der Erde und ihrer Bewohner, berechnen wollte. Dieser Mißbrauch der Mathematik nahm aber in eben dem Maaße ab, in welchem das ächtphilosophische Studium der Wissenschaften emporkam.

30.

Man theilt die Astronomie in die sphärische und theorische. Die erstere lehrt uns die Erscheinungen des Weltgebäudes kennen, in wie fern es sich als eine hohle Kugel nach den Gesetzen der Optik unsern Augen darstellt. Die letztere hingegen giebt uns Kenntniß von den Weltkörpern, wie sie sich nach dem, was die Beobachtungen von ihnen lehren, unserm Verstande darstellen müssen, oder wie sie wirklich im Weltraum angeordnet sind.

31. Mathematische Geographie.

Unter die totalen Weltkörper gehört aus Gründen der Astronomie auch unsere Erde. Verschiedene Lehren der Astronomie lassen sich also auch auf sie, besonders in Rücksicht der Abtheilung ihrer Oberfläche und ihrer Bewegung im Weltraume, anwenden. Außerdem können auch manche Lehren der reinen Mathematik zur Bestimmung ihrer Gestalt, der Abmessung ihrer Größe u. s. w. gebraucht werden. Den Inbegriff dieser Lehren nennt man die mathematische Erdbeschreibung oder Geographie.

32. Chronologie. Gnomonik.

Zu einer genauen Eintheilung größerer und kleinerer Zeiträume lassen sich zwar mechanische Vorrichtungen, welche unter dem Namen der Uhrwerke bekannt sind, gebrauchen; allein um dieselben immer in gehöriger Ordnung zu halten und sie für verschiedene Orte und Zeitpuncte vergleichbar zu machen, müssen doch wieder himmlische Erscheinungen und astronomische Lehren zu Hülfe genommen werden. Die Wissenschaft, wo man nach solchen Bestimmungen die Zeit im Großen abmißt, heißt die **mathematische Zeitrechnung** oder **Chronologie**; wo dieses hingegen im Kleinen, nach Stunden &c. geschieht, die **Sonnenuhrenkunst** oder **Gnomonik**. Bey dieser letztern wird nemlich gelehrt, wie man nach Gründen der reinen Mathematik auf jeder beliebigen Fläche Puncte bestimmen könne, auf welche von Stunde zu Stunde ein in der Lage der Weltaxe befestigter Stab seinen Schatten von der Sonne oder dem Monde wirft. Auch mit Hülfe der Sternbewegungen lassen sich die Stunden bestimmen.

33. Artillerie. Pyrobolik. Fortification. Civil-Architectur. Hydrotechnik. Bergbaukunde.

Mehrere Anwendungen der reinen **Mathematik**, wo aber auch noch verschiedene andere, außer ihrem Gebiete liegende Kenntnisse mit erfordert werden, lassen sich bey der **Geschütz- und Feuerwerkerkunst**, oder **Artillerie** und **Pyrobolik**, so wie bey der **Kriegs-**, **Civil-**, **Wasser-**, **Bergbau-** und **Schiffskunst** und dergl. machen. Jene Wissenschaften zeigen, wie man die Stärke des Schießpulvers bestimmt, wie das Geschütz nach jener Stärke in seinen verschiedenen Theilen abgemessen, gerichtet und sonst behandelt wird; was die Kugel oder der geworfene Körper für

einen Weg nimmt, wie man sich beym Sprengen zu verhalten hat u. s. w. In der **Kriegsbaukunst** oder **Fortification** findet man die Regeln, wie Plätze dergestalt zu befestigen sind, daß sich mit Hülfe der Artillerie wenige gegen viele eine Zeitlang vertheidigen können; aber auch hinwiederum, wie man solche befestigte Plätze, die unter dem Namen der **Festungen**, **Citadellen**, **Schanzen** und dergl. bekannt sind, mit Erfolg angreifen könne. Bey der **Civilarchitectur** hingegen hat man blos die zum Bewohnen oder zu wirthschaftlichen und andern friedlichen Verrichtungen bestimmten Gebäude zum Gegenstande. **Wasserbaukunst** oder **Hydrotechnik** kann so wie die **Bergbaukunde** wieder als eine besondre Anwendung der mechanischen und hydraulischen Wissenschaften auf Wasserleitungen, Schiffbarmachung der Ströme, Austrocknung der Moräste, Grabung schiffbarer Canäle, Sicherung und Reinigung der Häfen, Deichbau, Schleusenbau, Brückenbau —— Grubenbau ꝛc. angesehen werden.

34. Weitere Anwendung der reinen Mathematik.

Anwendungen der reinen Mathematik, die noch nicht zu förmlichen Wissenschaften gediehen sind, kommen gelegentlich in den Systemen der Naturlehre vor, z. B. bey der Lehre vom **Schall** und der **Musik**; von der **Wärme**; von der **Electricität** und dem **Magnetismus**. Die Hauptschwierigkeit, diese Gegenstände eigentlich meßbar zu machen, liegt in dem Mangel eines Maaßstabes, oder der Art, ihn bey der auszumessenden Größe anzubringen. Wenn man z. B. die Wärme des menschlichen Körpers ausmessen wollte, so müßte man vorher über eine gewisse Wärme, die als die Einheit anzusehen wäre, einverstanden seyn, und nun ein Mittel haben zu bestimmen, wie viel mal

diese genommen werden müßte, um die Größe der Wärme des Körpers hervorzubringen. Unsere gegenwärtigen hierzu dienlichen Hülfsmittel zeigen uns aber die Größen der Wärme nur aus ihren Wirkungen, und weil diese Wirkungen da, wo sie zuerst merkbar werden, schon eine gewisse, aber unbekannte Größe erreicht haben, so geben uns die folgenden größern oder kleinern bloße Unterschiede, oder sogenannte arithmetische Verhältnisse, da hingegen zu einer wahren Messung, wie das System lehrt, sogenannte geometrische Verhältnisse erfordert werden.

35.

Aehnliche Bewandtniß hat es auch mit Ausmessung der übersinnlichen oder moralischen Größen, welche zur Classe der intensiven gehören. Z. B. Wahrscheinlichkeiten und Hoffnungen bey der Dauer des menschlichen Lebens und den Glücksspielen; Anwuchs der Bevölkerung; Verstand, Herzensgüte; Vergnügen und Schmerz ꝛc.

36. Allgemeiner Einfluß der Mathematik.

Wenig menschliche Verrichtungen, sagt Hr. H. Kästner, sind, von denen nicht ein Theil auf mathematischen Gründen beruhete. Pflug und Wagen, alle Werkzeuge der Handwerker und Künstler sind Maschinen, von deren Beschaffenheit und Gebrauche die mathematische Kenntniß richtiger urtheilen lehrt. Ja man kann hinzusetzen, daß alle Erfahrungen bey ihrem Gebrauch, die zu ihrer weitern Vervollkommnung dienen könnten, unnütz werden, wenn nicht Theorie dabey mit zu Hülfe genommen wird. Von allen solchen Verrichtungen ist insgemein ein Theil physisch, der andere mathematisch. Die Zeichenkunst und Perspectiv sind das Mathematische der Mahlerkunst, die Eigenschaften der Farben,

ben, die Wirkungen ihrer Mischung, ihre Dauerhaftigkeit und dergl. das Physische. Daß Künstler und Handwerker keine Kenntniß von der Mathematik haben, das beweist nicht, daß die Mathematik ihnen unnütz sey. Man kann Lehren brauchen, die man gelernt hat, ohne ihre Gründe zu wissen, ohne einmal zu wissen, daß sie in eine Wissenschaft gehören. Aber wenn die Wissenschaft nicht wäre getrieben worden, so hätten diese Lehren, die in der Ausübung unentbehrlich sind, nicht können entdeckt werden.

37. Wichtigkeit einer gründlichen Einsicht in dieselbe.

Vorschriften, denen man folgt, ohne ihre Gründe zu wissen, können an sich unrichtig seyn, wenn unser Lehrer nicht Einsicht und Aufrichtigkeit genug hat; sind sie auch richtig, so können wir bey ihrer Anwendung fehlen, weil wir ihre rechte Bedeutung und ihre Grenzen nicht recht zu bestimmen wissen; und endlich wird es uns allezeit schwerer, wenn wir sie blos im Gedächtniß behalten sollen, als wenn wir die Verbindung mit ihren Gründen durch den Verstand einsehen. Beyspiele hierzu giebt uns die Rechenkunst bey den Aufgaben, welche theils nach der directen, theils nach der verkehrten Regel de tri aufgelöst werden müssen, wo die sogenannte welsche Practik anzubringen ist, u. s. w.

38.

Oft macht sich ein Künstler mathematische Regeln von seinen Beschäfftigungen, die ihn seine Aufmerksamkeit lehret, ob er gleich ihren Zusammenhang mit allgemeinen Gründen nicht einsieht. Das Gefühl lehrt den Fechter die Stärke und Schwäche des Degens und die Regeln des Lagers, wenn er auch nichts vom Hebelgesetz und Schwerpunct gehört hat. Auf

diese Art erfindet man sich eine Mathematik zu seinem Gebrauche, die aber nur in die engen Grenzen dieses besondern Gebrauchs, etwa wie bey den Kunsttrieben der Thiere, eingeschränkt ist. Da alle Menschen, die einen etwas aufgeweckten Kopf haben, dieses ohne Unterricht thun, so besitzt die menschliche Seele ohnstreitig ein Vermögen, mathematische Wahrheiten aus sich selbst zu entwickeln, wenn Neigung und Umstände sie darauf führen. Man kann dies die natürliche Mathematik nennen.

39. Ihr Nutzen.

Hoffentlich braucht es keinen weitläuftigen Beweis, daß eine Wissenschaft, oder vielmehr eine Sammlung von Wissenschaften nützlich sey, deren Verbindung mit allen menschlichen Beschäfftigungen so offenbar ist. Einem gebildeten Menschen, oder gar einem Gelehrten, ist es am allerwenigsten anständig, in ihr ganz unwissend zu seyn, wenn er nicht die Beschämung haben will, von Dingen, die ohne Zweifel für die Menschheit wichtig sind, eben so schlechte Begriffe zu haben, als der Pöbel. Die Art, wie man auf hohen Schulen die Mathematik vorzutragen gewohnt ist, kann, wenn der Lehrer die gehörige Geschicklichkeit besitzt, Studirenden wenigstens die ersten Begriffe von den vielfältigen Kenntnissen, welche die Mathematik enthält, und ihrer mannigfaltigen Anwendung geben; und wenn sie besonders in der reinen Mathematik eine gründliche Einsicht, und in der Algebra einige Fertigkeit erlangt haben, so werden sie im Stande seyn, diejenigen Untersuchungen, die vorzüglich ihren Absichten gemäß sind, durch Lesen und Nachdenken selbst weiter zu treiben, oder, durch besondern Unterricht darinnen, nützlicher zu gebrauchen.

40.

40.

Verschiedene Schriftsteller haben den Nutzen umständlicher gewiesen, den die Gottesgelehrten, die Rechtsgelehrten, die Arzneyverständigen und andere Gattungen von Gelehrten von der Mathematik haben können. Man sehe hiervon v. **Rohr Beschaffenheit und Nutzen, den die mathematischen Wissenschaften in der Theologie, Jurisprudenz und Medicin, auf Reisen und im gemeinen Leben haben.** Halle 1713. Auch *s'Gravesande Or. III. de Matheseos in omnibus scientiis usu. Lugd. Bat.* 1734.

41. Mathematische Methode.

Man hat noch einen Grund, weswegen die Mathematik einem jeden denkenden Kopf, besonders einem Gelehrten, angepriesen wird. Ohne Absicht auf den Gebrauch ihrer Wahrheiten selbst behauptet man, daß schon die Art, wie dieselben vorgetragen werden, seiner Aufmerksamkeit, und wo möglich seiner Nachahmung in der Wissenschaft, mit welcher er sich vornemlich beschäfftigt, würdig sey. Die **mathematische Methode** nämlich soll die einzige seyn, die zur Gewißheit führt, und der man sich also zu bedienen hat, wenn man vor Irrthümern sicher seyn will.

42.

Ohne die Mathematik selbst zu kennen, kann man eine Nachricht aus dem übereinstimmenden Zeugnisse aller, die sich um die Geschichte der Gelehrsamkeit bekümmert haben, als zuverlässig annehmen; daß nemlich alle Lehrer der Arithmetik und Geometrie über alle Sätze vollkommen einig sind. Von keinem Theil der Gelehrsamkeit läßt sich dieses weiter sagen, da in ihnen überall, nicht über Kleinigkeiten, sondern

über die ersten Gründe und die wichtigsten Lehren gestritten wird. Diese Einigkeit der Mathematikverständigen rührt nicht von der Natur des Gegenstandes her, den sie behandeln, sondern lediglich von der Art, wie sie ihn behandeln, wie sie ihre Lehren erforschen und vortragen, her. Diese muß so beschaffen seyn, daß sie selbst dadurch vor Irrthümern gesichert sind, und auch andere zwingen können, ihnen Beyfall zu geben.

43. Definitionen.

Bey dieser Methode fangen sie von Erklärungen an; das ist, sie zeigen deutlich und genau an, in was für einer Bedeutung sie die ihnen eignen Wörter gebrauchen, und gehen nie von dieser Bedeutung ab. Ihre Erklärungen enthalten weder mehr noch weniger Merkmale, als zulänglich sind, um die Sache, von welcher die Rede ist, zu erkennen. Zuweilen bestehen diese Merkmale in der Art, wie die Sache entstehen kann, woraus man dann ihre Möglichkeit einsieht, und solche Erklärungen besonders Sacherklärungen nennt (definitiones reales vel geneticae). Die andern heißen Worterklärungen (nominales), und man nimmt nicht an, daß die erklärten Sachen möglich sind, ohne es erwiesen zu haben. Eine Sacherklärung ist z. B. wenn man sagt, der Kreis entsteht, wenn sich eine gerade Linie um einen ihrer Endpuncte in einer Ebne herumdrehet, bis sie wieder in die vorige Lage kömmt. Die Worterklärung aber ist: Ein Kreis ist eine in sich selbst zurücklaufende krumme Linie, in welcher jeder Punct von einem gemeinschaftlichen Mittelpuncte gleichweit entfernt ist.

44. Grund- und Heische-Sätze.

Aus den Erklärungen fließen Grundsätze (axiomata), deren Wahrheit man einsieht, so bald man sie

sie versteht. Z. B. alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich. Die Grundsätze werden von allen Menschen gebraucht, und oft ohne daß sie daran denken, aber nur auf einzelne Gegenstände angewandt; daher man sie auch gemeine Begriffe (notiones communes) nennt. Oft giebt ihnen nur ihr allgemeiner Ausdruck ein geheimnißvolles Ansehen. Die Grundsätze sind übrigens von zweyerley Art. Wenn sie blos Wahrheiten behaupten, so kann man ihnen diesen Namen im engern Verstande lassen. Wenn sie fordern, daß man eine Sache verrichten könne, ohne die Art, wie es geschehen soll, zu zeigen, weil solche vielleicht zu offenbar in die Augen fällt, als daß sie dürfte gezeigt werden, so nennt man sie Heischesätze, Forderungen (postulata). Sie nehmen also eine Sache als möglich an, ohne die Möglichkeit umständlich darzuthun.

45. Lehrsätze. Aufgaben. Auflösungen. Beweise.

Die Sätze, deren Richtigkeit nicht unmittelbar in die Augen fällt, sondern bewiesen werden muß, behaupten entweder blos, daß etwas so sey, oder nicht sey; oder sie verlangen etwas zu bewerkstelligen. Jenes sind Lehrsätze (theoremata); dieses Aufgaben (problemata), denen man die Auflösung (solutio) als die Art, wie das verlangte bewerkstelligt wird, beyfügt. Der Beweis thut bey dem Lehrsatz die Wahrheit desselben dar; bey der Aufgabe aber zeigt er, daß dasjenige, was man verlangt, erhalten wird, wenn man der Auflösung gemäß verfährt. Beide bestehen in Schlüssen, die man, wenn es gefällig ist, in die syllogistische Form bringen kann, und wozu die Vordersätze aus den vorhergehenden Erklärungen, Grundsätzen und schon bewiesenen Sätzen genommen werden.

46. Zusätze.

Zuweilen kömmt man in diesen Schlüssen auf Sätze, die an sich merkwürdig sind. Man kann sie also nach vollendetem Beweise besonders anzeigen. Dieses haben die Alten corollaria genannt. Gegenwärtig versteht man darunter gewöhnlich Folgerungen, welche sogleich aus dem bewiesenen Satze fließen, und nennt sie im Deutschen Zusätze; sie können auch als Lehrsätze angesehen werden, deren Beweis aus dem so eben beygebrachten gleich in die Augen fällt.

47. Scholien.

Allen diesen Sätzen pflegt man zuweilen Anmerkungen (scholia) beyzufügen, in welchen man sie nöthigenfalls mehr erläutert, Anwendungen von ihnen zeigt, die Geschichte ihrer Erfindung angiebt, vor Mißdeutungen warnt, und was diesem sonst ähnlich ist.

48.

Das **Wesentlichste der mathematischen Methode** besteht darin, das, was man lehret, aus Gründen, deren Wahrheit ungezweifelt ist, durch Schlüsse, deren Richtigkeit den Verstand zum Beyfalle zwingt, darzuthun. In einem andern Verstande haben die wahren Kenner dieser Methode nie behauptet, daß man sich bestreben solle, sie bey den übrigen Theilen der Gelehrsamkeit anzubringen. Einen Unterschied aber unter der mathematischen und philosophischen Methode vorgeben, weil den Mathematikern die Untersuchung der Größen ein eignes Verfahren erlaubte, das sich anderswo nicht nachahmen ließe, ist lächerlich, da niemand das Verfahren der Mathematiker, in so fern es sich auf den ihnen eignen Gegenstand bezieht, zur Nachahmung vorgeschlagen, niemand verlangt hat,

wo

wo keine Größen vorkommen, zu messen und zu rechnen.

49. Euklides.

Man hat die mathematische Methode besonders nach dem Verfahren des Euklides abgeschildert, und sie daher die geometrische oder Euklidische genannt; und schwerlich wird man sie auch recht kennen lernen, wenn man nicht diesen Schriftsteller, und solche, die ihm getreulich folgen, liest. Neuere Lehrer der Geometrie sind von der gehörigen Schärfe im Beweisen oft weit abgewichen, vermuthlich um Trockenheit zu vermeiden, und sie solchen Personen, die blos als Liebhaber diese Wissenschaft kennen lernen wollen, leichter und angenehmer zu machen. Allein Euklid wußte selbst Königen keinen Weg zur Geometrie zu ebnen.

50. Willkührliche Sätze.

Außer dem, was der mathematischen Methode wesentlich eigen ist, hat man bey ihrer Anwendung noch manches blos zufälliges mit eingebracht. In der Arithmetik hat man Zeichen für die Zahlen ausgedacht, deren Beschaffenheit und Einrichtung man durch willkührliche Sätze (hypotheses) erklärt, weil sich eben diese Dinge auch mit ganz andern Zeichen hätten andeuten lassen. Man hat Kunstgriffe angebracht, vermittelst welcher sich alle Zahlen, deren Menge unendlich ist, durch sehr wenige Zeichen ausdrücken und mit einander vergleichen lassen. Die Kunstwörter in den Wissenschaften sind Zeichen der Begriffe, wie die Ziffern in der Arithmetik. Aber das Verfahren der Arithmetik, mit sehr wenigen Zeichen sehr viele Begriffe verständlich und bequem auszudrücken, wird nicht überall bey den Kunstwörtern nachgeahmt.

51. Ge-

51. Gebrauch der Erfahrungen, Beobachtungen und Versuche in der Mathematik.

In der angewandten Mathematik gehören zu den Grundsätzen auch mit die Erfahrungen, Beobachtungen und Versuche. Durch eine aufmerksame Betrachtung der himmlischen Körper sind die Astronomen zu einer Kenntniß derselben gelangt, welche die Schranken des menschlichen Verstandes fast zu übersteigen scheint, ob ihnen gleich diese Körper nur aus dem Ansehen in großen Entfernungen bekannt sind. Dieses erhabne und unleugbare Beyspiel zeigt, daß sich der Nutzen der mathematischen Methode auch auf Gegenstände in der wirklichen Welt, von denen unsere Begriffe nicht willkührlich sind, anwenden lasse, nemlich auf die Geschichte; denn Astronomie ist Geschichte des Himmels. Der Freyherr von Wolf hat es den Aerzten zur Nachahmung vorgestellt, und seine Erinnerung wird dadurch vollkommen gerechtfertigt, daß die alten griechischen Aerzte, die in der Kenntniß der Natur so weit unter den heutigen stehen, in der Heilung der Krankheiten noch ihre Lehrmeister bleiben.

52. Hypothesen.

Man hat sich in der Astronomie eines Mittels zu Erforschung der Wahrheit bedient, das dem ersten Ansehn nach verführerisch scheint. Man nimmt Hypothesen an, oder man setzt zum voraus, es gehe mit einer gewissen Begebenheit auf die und die Art zu. Läßt sich nun alles, was bey der Begebenheit und dem damit verbundenen vorkommt, aufs genaueste aus der Hypothese herleiten, so erhält dieselbe dadurch immer mehr und mehr Wahrscheinlichkeit, und kann durch eine vollkommene Uebereinstimmung aller Begebenheiten mit ihr zur Gewißheit erhoben werden.

Diese Vergleichung mit den Begebenheiten ist also die Prüfung, bey welcher eine falsche Hypothese nicht lange bestehen, wenigstens nicht verführen kann, weil man sie nicht länger beybehalten wird, als sie mit der Wahrheit übereinstimmt. Indessen kann selbst eine falsche Hypothese durch das, was in ihr wahr ist, den Weg zu Kenntnissen bahnen, zu denen man ohne alle Hypothesen nie gelangt wäre. Dieses ist von einigen als ein Fall angesehen worden, wo man Wahrheit aus Unwahrheit richtig herleitete, und Erdichtungen zum Erfinden (fictiones heuristicas) mit Nutzen brauchte. Allein eigentlich wird nie aus der Unwahrheit, sondern allezeit aus der Wahrheit geschlossen. Es giebt Sätze, die nicht völlig wahr sind, sondern wo Wahrheit und Falschheit untermengt sind; aber sie dienen uns auch nur zu sichern Gründen, in so fern sie Wahrheit enthalten. Man muß auch das bedenken, daß in der Mathematik sich nicht alle Größen wirklicher Dinge gleich anfangs mit der größten Richtigkeit finden lassen; daß man sie zuerst nur ohngefähr bestimmt, und diese Bestimmungen dann weiter braucht, um schärfere daraus zu finden. Solche schärfere Bestimmungen suchen, heißt aber nicht soviel, als die erstern für falsch erklären. Die Mathematik überzeugt uns durch unzählige Proben, daß wir auch bey der höchsten Erkenntniß der Menschen zufrieden seyn müssen, der Wahrheit immer näher und näher zu kommen, die wir vielleicht nie völlig erreichen werden.

53. Synthetische, analytische und gemischte Methode.

Man kann bey dem Vortrage der schon erfundenen Wahrheiten etwas anders verfahren, als bey der Erforschung solcher, die noch unbekannt sind. Dort ist es genug, jeden Satz überzeugend darzuthun,

obgleich aus sein[e]m Beweise eben nicht erhellet, wie sein erster Erfinder auf ihn gekommen ist; hier muß man den Weg zeigen, auf welchem man zu dem Gesuchten gelangen kann. Jene Lehrart pflegt man die synthetische, diese die analytische zu nennen. Aus beiden läßt sich eine vermischte zusammensetzen, welche zum Vortrage der Anfangsgründe der Wissenschaften am bequemsten ist. So weit Hr. Kästner.

54. Kants Bestimmung des Eigenthümlichen in der mathematischen Methode.

Herr Pr. Schultz sagt in seinen Prolegomenen zur gesammten Mathematik, nachdem er von der mathematischen Methode auf die vorbeschriebene Art gehandelt hat, unter andern: Machten also diese Stücke das Wesentliche der mathematischen Methode aus, so wäre diese nichts weiter, als die allgemeine scientifische oder systematische Methode, die in jeder andern Wissenschaft, und besonders in der Philosophie, eben so genau als in der Mathematik befolgt werden müßte. Allein das Wesen der mathematischen Methode besteht gar nicht in diesen Puncten, sondern, wie Kant in seiner Kritik der reinen Vernunft im 1. Abschn. der Methoden-Lehre deutlich gezeigt hat, blos darin, daß der Mathematiker nicht, wie der Philosoph, discursiv, sondern intuitiv verfährt, nämlich daß er nicht, wie jener, aus Begriffen schließt, sondern vielmehr seine Begriffe construirt, d. i. sie in der Anschauung darstellt, und zwar in einer nicht empirischen, von aller Erfahrung unabhängigen Anschauung a priori. Da nun jeder Begriff mehrere einzelne Dinge unter sich begreift, jede Anschauung aber eine einzelne Vorstellung ist; so denkt der Philosoph in seinen Beweisen allemal das Einzelne unter dem Allgemeinen, der Mathematiker hingegen stellt sich in seinen Beweisen jedesmal das Allgemeine im Einzelnen vor. Ohne die-

dieses Verfahren ist der Mathematiker ganz unfähig, sowohl die Möglichkeit irgend eines Begriffs, als irgend einen einzelnen Satz darzuthun, folglich wäre er ohne dasselbe gar nicht im Stande, den bey der mathematischen Methode gewöhnlichen Gang §. 43. u. f. zu befolgen. Daß dieses im ganzen Euklides klar zu Tage liegt, hat Hr. Schulz in seiner Prüfung der Kantischen Kritik der reinen Vernunft S. 54. u. f. umständlich und deutlich gezeigt.

55. Unterschiede in der Methode des Philosophen und Mathematikers.

Aus diesem Grunde sind Definitionen, Axiome, Postulate und Demonstrationen im strengsten Sinne, d. i. in der Art, wie sie der Mathematiker hat, der Mathematik ausschließlich eigen. Denn da die reine Mathematik von allen wirklichen Gegenständen gänzlich abstrahirt, so muß der Mathematiker sich seinen Gegenstand, z. B. die Summe, Potenz, Proportion, den Kreis, Triangel, Kegel ꝛc. jedesmal erst durch die Definition selbst machen, und daher nicht nur die wesentlichen Merkmale, die der Begriff desselben enthalten soll, selbst wählen, sondern ihn auch aus denselben willkührlich zusammensetzen, folglich kann seinem Gegenstande niemals mehr oder weniger, sondern nur gerade das zukommen, was sein Begriff anzeigt, mithin ist er sicher, daß dieser durch die Definition ausführlich, genau und ursprünglich bestimmt, und daher nichts weiter nöthig ist, als ihn zu construiren, d. i. in der reinen Anschauung darzustellen, um alle synthetische Sätze, die von ihm stattfinden, auszumitteln, und so alle seine Attribute und Modos zu bestimmen. Der Philosoph hingegen hat es mit wirklichen Gegenständen zu thun, er kann sich also dieselben nicht durch einen willkührlichen Begriff selbst schaffen, sondern sie werden ihm vor ihrem

Begriff entweder empirisch durch die Wahrnehmung, oder a priori durch die Form des Verstandes gegeben, folglich kann er sich von ihnen nicht anders einen Begriff bilden, als daß er das Mannigfaltige, welches die Wahrnehmung oder die Denkform enthält, analytisch zergliedert. Allein da er bey den empirischen Begriffen, z. B. Luft, Magnet, Geld rc. niemals wissen kann, ob der Gegenstand nicht noch manche wesentliche Merkmale enthalten mag, die er bisher noch nicht wahrgenommen, die Begriffe a priori aber, z. B. Substanz, Ursache, Recht rc. manche dunkle Vorstellungen enthalten, die er bey der Analysirung leicht übergehen oder gar mißverstehen kann, so ist es wenigstens zweifelhaft, ob sein Begriff den Gegenstand wirklich definirt, d. i. seine wesentlichen Merkmale ausführlich und genau bestimmt. Der Philosoph kann also nicht, wie der Mathematiker, seine Untersuchungen über den Gegenstand mit der Definition anfangen, sondern er muß sich anfangs nur mit den ersten Merkmalen derselben behelfen, und den noch unvollständigen Begriff erst durch synthetische Sätze zu erweitern suchen, wenn er zum ausführlichen und genau bestimmten Begriff des Gegenstandes gelangen will.

56.

Eben so sind auch eigentliche Axiome, Postulate und Demonstrationen blos der Mathematik eigen. Axiome und Postulate sind synthetische Sätze, in welchen die nothwendige Verknüpfung des Prädicats mit dem Subjecte unmittelbar einleuchtend ist. Was aber unmittelbar einleuchtend ist, das kann nicht erst aus Begriffen geschlossen werden, sondern muß durch Anschauung gegeben seyn. Also muß in Axiomen und Postulaten die Verknüpfung des Prädicats mit dem Subjecte durch Anschauung gegeben werden,

und

und zwar, da sie Nothwendigkeit und strenge Allgemeinheit mit sich führen müssen, durch Anschauung *a priori;* und von der Art sind eben die Axiome und Postulate der reinen Mathematik. In der Philosophie hingegen wird kein synthetischer Satz durch Anschauung a priori gegeben, folglich finden hier keine eigentlichen Axiome oder Postulate statt, sondern die sogenannten philosophischen Grundsätze haben alle eine Deduction oder Beweis nöthig.

Ein gleiches gilt auch von den Demonstrationen. In diesen muß nemlich jeder Satz intuitiv seyn, und von der Art sind eben alle Demonstrationen in der Mathematik. Die philosophischen Beweise hingegen mögen noch so strenge und apodictisch gewiß seyn, so fehlt ihnen doch immer das Anschauliche, und sie können daher nie den Beyfall eines jeden in der Art gebieten und erzwingen, als es jede mathematische Demonstration sicher thun kann.

57.

Der Unterschied zwischen der mathematischen und philosophischen Methode ist also eben so wesentlich, als der zwischen einer intuitiven und discursiven Erkenntniß, und eben hierauf beruht der ausnehmende Vorzug der Klarheit und Evidenz, der die Mathematik vor allen übrigen Vernunftwissenschaften so sichtbar auszeichnet. Der Philosoph mag also den Euklidischen Gang §. 43. u. f. noch so streng nachahmen, und sein System mit allen mathematischen Titeln schmücken; seine Definitionen, Axiome, Postulate und Demonstrationen sind nie von dem Range, den die mathematischen behaupten, er kann nur discursiv zu Werke gehen; der Mathematiker hingegen stellt alle seine Begriffe und Sätze intuitiv dar. Braucht es, um sich hiervon klar zu überzeugen, wol mehr, als die einzige Bemerkung, daß Wolf und Spinoza

in ihren philosophischen Systemen jenen Gang der Mathematiker aufs strengste nachgeahmt, und dennoch das System des einen gerade das Gegentheil von dem System des andern ist?

58. Gränzen der Mathematik.

Hieraus ist zugleich klar, daß die Mathematik blos auf sinnliche Gegenstände, d. i. auf Erscheinungen, anwendbar ist. Denn nichtsinnliche Gegenstände lassen sich in gar keiner menschlichen Anschauung darstellen. Also ist eine Mathematik des Einfachen, und um so mehr eine Mathesis divina, ein leeres Hirngespinst.

59. Ihre Gegenstände.

Eben diese Form der mathematischen Erkenntniß ist endlich auch der Grund, warum die Mathematik blos Quanta zum Gegenstande hat, denn es giebt für uns a priori keine andere Anschauungen, als die Formen der Erscheinungen, nämlich Raum und Zeit, welche, da sie aus gleichartigem bestehen, uns als Quanta gegeben werden, folglich läßt sich alles, was von diesen gilt, es mag ihre Quantität oder Qualität betreffen, a priori in der Anschauung darstellen, d. i. construiren, mithin sind Raum und Zeit die beiden speciellen Objecte der reinen Mathematik, und da die Zeit sich durch eine gerade Linie construiren läßt, so bestätigt sich nicht allein die Behauptung, daß die Wissenschaft des Raums die ganze mathesin puram specialem ausmacht, sondern man sieht hieraus zugleich, woher die Geometrie nicht blos die Quantität, sondern auch die Qualität des Raums zum Gegenstande hat. Eben hieraus folgt aber auch zugleich, daß alles, was sich im Raum oder in der Zeit darstellen läßt, und nichts weiter, ein Gegenstand der Mathematik ist. Nun läßt sich in allen Quantis,

von

von welcher Qualität sie auch seyn mögen, das Gleichartige, welches sie enthalten, wenigstens successiv in der Zeit darstellen, mithin zählen. Also erhellt hieraus nicht nur der Grund, woher die Zahlenwissenschaft zur allgemeinen reinen Größenlehre gehört, sondern auch zugleich, daß selbst das Reale der Erscheinungen, welches eigentlich ihre Qualität ausmacht, dennoch in Ansehung seines Grades, oder seiner intensiven Größe, ein mathematisches Object ist. Da wir hingegen die Qualität selbst, als das Materiale der Erscheinungen, lediglich durch empirische Anschauungen kennen, und sie daher blos in dieser, nicht aber in einer Anschauung a priori darstellen können, so ist klar, warum die Qualität der Erscheinungen kein Gegenstand für den Mathematiker seyn kann, sondern für den Philosophen gehört.

V—t.

II. A.

AA. Erste Gründe der allgemeinen Mathematik *).

§. 1. Merkmale.

Erklärung. Merkmale eines Dinges nennt man diejenigen Eigenschaften desselben, wodurch es sich von andern unterscheiden läßt. Man theilt sie in die innern und äußern. Die erstern betreffen seine Qualität, und die andern bezeichnen seine Quantität.

§. 2. Völlige Einerleyheit.

Erklär. Dinge nennt man an sich betrachtet vollkommen einerley, wenn sie sich durch kein inneres Merkmal unterscheiden lassen. Sie können aber noch durch Raum und Zeit unterschieden werden (§. 1.).

§. 3.

Erklär. Mehrere Dinge werden als ein und dasselbe Ding angesehen, wenn sie an sich betrachtet vollkommen einerley sind, und man sie sich in eben demselben Raume vorstellt.

§. 4.

*) Diese Ersten Gründe sind größtentheils nach Hrn. Pr. Schulz Anfangsgründen der reinen Mathesis, Königsberg 1790. vorgetragen. Zuweilen ist auch aus Hrn. H. Kästners Anfangsgr. d. Arithmet. 1792., so wie aus dem eignen Vorrath des Verf., etwas eingeschaltet worden.

V.

§. 4. Ungleichartige Dinge.

Erklär. Dinge von einer Art, oder gleichartige, homogene, sind solche, bey denen blos dasjenige betrachtet wird, was sie mit einander gemein haben. Dinge, wo man das Verschiedene in ihnen betrachtet, heißen in dieser Rücksicht ungleichartige, heterogene. Z. B. Papier und Feder sind als Schreibmaterialien gleichartig, in wiefern aber mit dem einen geschrieben und von dem andern die Schrift aufgenommen wird, sind sie ungleichartig.

§. 5. Aehnliche, unähnliche, gleiche, ungleiche, ineinanderfallende, unvergleichbare Dinge.

Erklär. Gleichartige Dinge von einerley Qualität heißen ähnliche (similia); von einerley Quantität, gleiche (aequalia). Dinge, bey welchen Aehnlichkeit und Gleichheit vereinigt sind, nennt man ineinanderfallende, sich deckende (congruentia). Hieraus ergiebt sich von selbst, was unähnliche und ungleiche Dinge (dissimilia et inaequalia) sind. Dinge, die so ungleichartig sind, daß man sie weder ähnlich noch gleich nennen kann, heißen unvergleichbar (disparata), z. B. eine Linie und eine Fläche. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist: $\backsim$; das Zeichen der Gleichheit: $=$; und das Zeichen der Congruenz: $\cong$. Z. B. $\circ \backsim \odot$, oder 1 Rthlr. $=$ 24 Gr., oder ein Tropfen Regen-Wasser $\cong$ einem Tropfen Schneewasser.

§. 6. Substitution.

Zusatz. Aehnliche Dinge lassen sich in Ansehung ihrer Qualität, gleiche in Ansehung ihrer Quantität für einander setzen, oder substituiren, und so hinwiederum: Dinge, die sich in Absicht ihrer

Qualität substituiren lassen, sind ähnlich, und die sich in Ansehung ihrer Quantität substituiren lassen, sind gleich. Congruente Dinge an sich betrachtet lassen sich vollkommen substituiren, und Dinge, bey welchen dieses geschehen kann, sind congruent. Wenn man sich also mehrere congruente Dinge an eben demselben Orte vorstellt, so hören sie auf mehrere zu seyn, und sind nur ein einziges (§. 3.)

§. 7. Gleichheit der Größen.

Grundsatz. Eine jede Größe ist sich selbst gleich, denn nach dem Satze des Widerspruchs oder der Identität ist a = a seiner Quantität nach. Auch sind zwey oder mehrere Größen, deren jede ein und ebenderselben andern gleich sind, einander selbst gleich. Z. B.

24 Gr. = 1 Rthlr.
288 Pf. = 1 Rthlr.

Also 24 Gr. = 288 Pf.

Es muß sich nemlich nach (§. 6.) im ersten Satze 288 Pf. statt 1 Rthlr. setzen lassen, weil dieselben nach dem zweyten Satze 1 Rthlr. gleich sind.

§. 8. Das Ganze und seine Theile.

Erklär. Wenn eine Größe g als eine aus mehrern gleichartigen, a, b, c etc. zusammengesetzte betrachtet werden kann, so nennt man sie ein Ganzes, und die Größen a, b, c etc. ihre Theile, und zwar die wirklichen (actuales), zum Unterschied der blos möglichen (potentiales), worunter alle Größen begriffen sind, die gleichartig mit g, und kleiner als dieselbe sind. So sind z. B. 6, 3, 1 die wirklichen Theile von 10, hingegen 9, 8, 7 u. s. w. sind jeder für sich betrachtet blos mögliche Theile von 10.

§. 9.

§. 9.

Grundſ. Das Ganze iſt ſeinen wirklichen Theilen zuſammengenommen gleich, und größer als jeder ſeiner Theile (§. 8.).

§. 10. Einfach, zuſammengeſetzt, unendlich theilbar.

Erklär. Ein Ding iſt, in wiefern es aus Theilen beſteht, theilbar oder zuſammengeſetzt; hingegen untheilbar, einfach, in wie fern es keine Theile hat. Iſt jeder Theil wieder theilbar, ſo heißt es ins Unendliche theilbar, wie z. B. Raum und Zeit.

§. 11. Verwandlung mehrerer Größen in eine einzige.

Poſtulat. Mehrere gegebne gleichartige Größen können durch ihr ſucceſſives Zuſammennehmen in ein einziges Quantum, oder in ein Ganzes verwandelt werden.

§. 12. Vermehrung der Größen.

Erklär. Ein Quantum a mehreremale zu ſich ſelbſt ſetzen, heißt, es aufhäufen oder vermehren. Das Zeichen, wodurch ſolches angedeutet wird, iſt +, welches durch plus ausgeſprochen wird, z. B. $a + a + a$.

§. 13. Verhältniß der Gleichheit zu ihrer Vermehrung.

Grundſ. Wenn gleiche Größen zu gleichen geſetzt werden, ſo ſind die zuſammengeſetzten auch gleich, z. B. wenn $a = b$,
und $c = d$,

ſo iſt auch $a + c = b + d$. Dies folgt aus §. 6.

§. 14. Vielfaches. Aliquote, aliquante Theile.

Erklär. Eine Größe b, welche durch eine Aufhäufung der Größe a erzeugt wird, heißt ein Vielfaches (multiplum) von a. Dagegen heißt a ein aliquoter Theil, oder ein Submultiplum von b, und man setzt, a sey etlichemal in b enthalten. Jeder Theil von b aber, durch dessen Aufhäufung die Größe b nicht hervorgebracht wird, heißt ein aliquanter von b. Z. B. 4 ist ein aliquoter Theil von 12, weil $4 + 4 + 4 = 12$, hingegen 5 ist ein aliquanter Theil davon, weil $5 + 5$ noch nicht, und $5 + 5 + 5$ schon mehr als 12 giebt.

§. 15.

Zus. Jedes Vielfache ist also ein Ganzes, welches aus lauter gleichen Theilen besteht.

§. 16. Maaß.

Erklär. Eine Größe a, welche ein oder mehrmal genommen eine andere b hervorbringt, wird das Maaß von b genannt. Z. B. 3 ist ein Maaß von 3, weil $3 = 3$, oder auch ein Maaß von 12, weil $3 + 3 + 3 + 3 = 12$. Der aliquote Theil einer Größe ist also allemal nur ein Maaß von ihr (§. 14.), und jedes Maaß ist mit der gemessenen Größe gleichartig.

§. 17.

Zus. Wenn a ein Maaß von b, und b ein Maaß von c ist, so ist auch a ein Maaß von c. Man kann nemlich statt b setzen $a + a$ u. s. w.; indem also c aus $b + b$ etc. besteht, muß es auch aus $a + a + a + a \dots$ bestehen. Man darf sich in diesem Falle a z. B. nur gleich 1 Fuß, $b = 2'$ und $c = 4'$ denken.

§. 18.

§. 18. Unterschiede der Größe und Kleinheit mehrerer Größen.

Erklär. Eine Größe a ist größer als eine andere b, wenn ein Theil von a der ganzen b gleich ist; man drückt dieses durch das Zeichen > aus. Z. B. a > b. Ist hingegen a einem Theile von b gleich, so nennt man a kleiner als b, welches so angezeigt wird a < b.

§. 19.

Zus. Was größer oder kleiner ist, als eine von zwey gleichen Größen, das ist auch größer oder kleiner, als die andre von denselben. Z. B.

1 Rthlr. > 1 Gulden,
16 Gr. = 1 Gulden,
also auch 1 Rthlr. > 16 Gr.

Mit eben dem Rechte kann man auch sagen: wenn eine Größe größer ist, als die größere von zwey ungleichen, so ist sie auch größer als die andere von denselben, z. B. 1 Rthlr. > 1 Mfl.,
1 Mfl. > 1 Gulden,
also auch 1 Rthlr. > 1 Gulden.

Eben so kann man sagen, wenn vom Kleinern die Rede ist.

§. 20. Einheit. Endliche und unendliche Menge.

Erklär. Eine Größe a, die man sich als einmal genommen vorstellt, heißt die Einheit von ihr; aus einem unbestimmten Mehrmalnehmen entspringt die Menge von ihr. Ist es bestimmt, wenn die Wiederholung aufhören soll, so heißt die Menge endlich; soll sie hingegen niemals aufhören, so heißt sie unendlich.

§. 21.

§. 21.

Zus. Die Einheit ist also ein Maaß von ihr selbst und von jeder Menge. Drückt man die Einheit durch 1 und die Menge durch m aus, so ist $m = 1 + 1 + 1 \ldots$ Drückt man ein Multiplum, welches erzeugt wird, indem man eine Größe, a, m mal wiederholt, durch ma aus, so ist das nächstfolgende Vielfache $= ma + a$. Z. B. zehn Thaler ist ein Vielfaches oder Multiplum vom Thaler $= a$, und $m = 10$, also ist das nächste Vielfache: 11 Thaler = 10 Thaler + 1 Thaler.

§. 22. Endlich und unendlich vielste Theile.

Erklär. Wenn eine Größe b entweder selbst ein vielfaches ma ist, das durch eine endliche Menge von a erzeugt wird, oder doch größer ist, als ein durch irgend eine endliche Menge von a erzeugtes Vielfaches ma, aber kleiner als das nächstfolgende Vielfache $ma + a$; so sagt man: a ist in b endlich vielmal enthalten, oder a ist ein endlich-vielster Theil von b. Ist hingegen die Menge von a, durch welche b erzeugt wird, unendlich; so sagt man: a ist in b unendlich vielmal enthalten, oder a ist ein unendlich-vielster Theil von b. Z. B. $4 + 4 = 8$; ferner $4 < 7$, aber $4 + 4 > 7$, ingleichen $4 + 4 < 10$, aber $4 + 4 + 4 > 10$, so heißt 4 ein endlichvielster Theil von 8, 7 und 10. Hingegen ist 4 ein unendlichvielster Theil von einer Zahl, welche entsteht, wenn man 4 durch 0 dividirt, wie an seinem Orte deutlicher wird gezeigt werden.

§. 23. Endlich, unendlich große und kleine Größen.

Erklär. Eine Größe heißt endlich, wenn sie völlig begrenzt ist; unendlich groß, wenn sie größer;

un-

unendlich klein, wenn sie kleiner ist, als jede gleichartige endliche Größe. Z. B. die Tangente eines Bogens von 45 Grad ist eine endliche; die von 90 Grad eine unendlich große, und der Unterschied zwischen zweyen, allernächst auf einander folgenden, eine unendlich kleine Größe.

§. 24. Maaß.

Zus. Ein unendlichvielster Theil von einer endlichen Größe b ist kein Maaß von ihr; mithin ist jedes Maaß, wodurch sich eine endliche Größe erzeugen läßt, ein endlichvielster Theil von ihr (§. 22.). Z. B. 4 ist ein Maaß von 12, und zugleich ein endlichvielster Theil von 12.

§. 25. Vermehrung und Verminderung der Größen.

Erklär. Eine Größe wächst oder wird vermehrt, wenn sie größer wird; sie nimmt ab, wenn sie kleiner wird, und alle Veränderungen, deren eine Größe in Absicht ihrer Quantität fähig ist, sind entweder Vermehrung oder Verminderung.

§. 26.

Postulat. Man kann jede gegebne Größe in Gedanken ohne Ende vermehren und vermindern.

§. 27. Addiren. Posten, Summanden, Aggregat, Summen.

Erklär. Mehrere gegebene Größen addiren, heißt, eine Größe finden, die ihnen zusammengenommen gleich ist. Die gegebnen Größen heißen die Posten oder Summanden, und die gefundene das Aggregat oder die Summe. Die Bestimmung der Summe heißt die Addition. Das Zeichen der Addition

tion ist das Zeichen + (§. 12.). Z. B. $a + b + c = s$. Hier sind a, b, c die Posten, und s die Summe. Betrachtet man mehrere Posten als Eine Größe, so schließt man sie in Klammern ein. Z. B. $(a + b)$ ist schon als die Summe von a und b anzusehen, und wenn man $(a + b) + c = s$ setzt, so stellt $(a + b)$ blos eine Post vor.

§. 28.

Zus. Wenn die Posten aus gleichartigen Größen bestehen, so ist die Summe ein Ganzes, und die Posten sind die wirklichen Theile desselben (§. 8.). Wenn $a > b$ ist, so giebt es allemal eine Größe p, die, zu b addirt, die Summe a giebt, d. i. $a = b + p$, z. B. $8 > 5$, also $8 = 5 + 3$.

§. 29.

Zus. Gleiches zu Gleichem addirt, giebt gleiche Summen (§. 13.).

§. 30.

Grundſ. Die Größe der Summe ist einerley, man mag die Posten in einer Ordnung zusammennehmen, in welcher man will, d. i. $a + b + c = b + c + a$ etc. Z. B. $5 + 3 + 2 = 3 + 2 + 5 = 10$.

§. 31.

Grundſ. Die Größe der Summe ist einerley, man mag zu einer gegebnen Größe eine andere entweder auf einmal ganz, oder jeden ihrer Theile nach und nach einzeln addiren; d. i. $c + (a + b) = (c + a) + b = a + b + c$.

§. 32.

Lehrsatz. Wenn bey gleichartigen Größen Gleiches zum Größern und Kleinern addirt wird, so

so wird die Summe im ersten Fall größer als im letztern.

Beweis. Wenn nemlich $a > b$, so kann man $a = b + p$ setzen (§. 28.), ist nun $c = d$, so wird $a + c = b + d + p$ (§. 29.), folglich $a + c > b + d$, da itzt zur Größe rechter Hand noch das p fehlt, um der Größe linker Hand gleich zu seyn.

§. 33.

Zus. Wenn c ein Maaß von a, ferner $c < a$ und $p < c$ ist, so ist c kein Maaß von $a + p$, z. B. 9 ist ein Maaß von 54, und $7 < 9$, also ist 9 kein Maaß von $54 + 7$ oder von 61.

§. 34.

Lehrs. Wenn man Größeres und Kleineres zu gleichartigen gleichen Größen addirt, so ist die Summe im ersten Falle größer als im letztern.

Beweis. Er ist wie in §. 32.

§. 35.

Zus. Wenn zu Größerem und Kleinerem, im erstern Fall Größeres, und im letztern Kleineres addirt wird, so kommt ebenfalls im erstern Fall eine größere Summe als im letztern.

§. 36. Abziehen. Subtrahiren. Minuend. Subtrahend. Differenz, Rest.

Erklär. Eine gegebne Größe b von einer andern gegebnen a abziehen oder subtrahiren, heißt, eine Größe d finden, die zu b addirt der Größe a gleich ist. Z. B. 3 von 8 abziehen, heißt 5 finden, welche, zur 3 addirt, 8 giebt. Die Größe a, von welcher der Abzug geschehen soll, heißt der Minuend, die Größe b, welche abgezogen werden soll, der Subtrahend, und die gefundene Größe d die Differenz

oder der Rest. Das hiebey gebrauchte Verfahren selbst heißt die Subtraction. Das Zeichen derselben ist ein —, welchen man zwischen Minuend und Subtrahend setzt, z. B. $a - b = d$ oder $8 - 3 = 5$. Sieht man $a - b$ schon als die Differenz, d. i. als Eine Größe an, so schließt man sie in Klammern, z. B. $a - b = (a - b)$.

§. 37.

Zus. Es ist also der Minuend als die Summe des Subtrahends und der Differenz anzusehen. Nemlich wenn $a - b = d$, so ist $a = d + b$.

§. 38.

Zus. Wenn man von der Summe zweyer Größen die eine abzieht, so bleibt die andere übrig, d. i. wenn $a = d + b$ ist, so ist $a - b = d$ und $a - d = b$.

§. 39.

Zus. Wenn man die Differenz vom Minuend abzieht, so bleibt der Subtrahend übrig; d. i. wenn $a - b = d$, so ist $a - d = b$. Es ist nemlich $a = d + b$ (§. 37.) und $a - d = b$ (§. 38.).

§. 40.

Zus. Wenn Minuend und Subtrahend einander gleich sind, so ist die Differenz 0. Wenn $b - a = 0$, so ist $b = a + 0$ (§. 37.), also $b = a$. Wird zu einer Größe eine andere addirt, und zugleich von ihr subtrahirt, so bleibt sie ungeändert, d. i. $a + b - b = a$. Wenn man von einer Größe eine andere subtrahirt, und diese zur Differenz wieder addirt, so bleibt sie ebenfalls unverändert, d. i. $a - b + b = a$.

§. 41.

Zus. Es kommt einerley heraus, man mag zu einer Größe a successiv erstlich b addiren und dann c sub-

subtrahiren, oder man mag zu a auf einmal die Differenz (b — c) addiren, d. i. $a + b - c = a + (b - c)$. Eben so erhält man einerley, man mag zu a erst b addiren und hernach c subtrahiren, oder man mag erst c subtrahiren und hernach b addiren, d. i. $a + b - c = a - c + b$. Ferner ist es einerley, man mag von einer Größe a auf einmal die ganze Summe $b + c$, oder successiv eine Post nach der andern abziehen, d. i. $a - (b + c) = a - b - c$. Endlich ist es einerley, man mag von a die Differenz (b — c) subtrahiren, oder man mag von a erst den Minuend b subtrahiren, und hernach den Subtrahend c addiren, d. i. $a - (b - c) = a - b + c$.

§. 42.

Zus. Wenn man Gleiches von Gleichem subtrahiret, so sind die Differenzen gleich, d. i. wenn $a = c$ und $b = d$, so ist $a - b = c - d$.

§. 43.

Lehrs. Wenn man bey gleichartigen Größen von eben derselben Größe eine kleinere und größere abzieht, so ist die erstere Differenz größer als die andere, d. i. wenn $c < b$, so ist $a - c > a - b$. Z. B. $8 - 5 > 8 - 7$.

Beweis. $c + p = b$ (§. 28.), also $a - b = a - (c + p)$ (§. 42.) $= a - c - p$ (§. 41.), folglich $a - b + p = a - c$ (§. 37.), folglich $(a - b) + p = a - c$ (§. 36.), also $a - c > a - b$ (§. 9.).

§. 44.

Lehrs. Wenn man bey gleichartigen Größen vom Größern und Kleinern Gleiches abzieht, so ist die erste Differenz größer als die andere, d. i. wenn $a > c$, so ist $a - b > c - b$, z. B. $8 - 5 > 7 - 5$.

Beweis. $a = c + p$ (§. 28.), also $a - b = c + p - b$ (§. 42.) $= p + c - b$ (§. 30.), folglich $a - b = p + (c - b)$ (§. 31.), also $a - b > c - b$ (§. 9.).

§. 45.

Lehrs. Wenn bey gleichartigen Größen von der größern weniger abgezogen wird, als von der kleinern, so ist die erste Differenz größer als die andere, d. i. wenn $a > b$ und $c < d$ ist, so ist $a - c > b - d$.

Z. B. 10 Thaler > 10 Gulden,
1 Thaler < 2 Gulden.

9 Thaler > 8 Gulden.

Beweis. Es ist $a - c > a - d$ (§. 43.) und $a - d > b - d$ (§. 44.), also $a - c > b - d$ (§. 19.).

§. 46. Folge der endlichen Größen nach ihrer Quantität.

Lehrs. Wenn man jede endliche Größe, welche kleiner als die gleichartige endliche c ist, durch p ausdrückt, so folgen alle endliche Größen, ihrer Quantität nach, in dieser Ordnung auf einander: p, c, $c + p$, $c + c$, $c + c + p$, $c + c + c$, $c + c + c + p$ u. s. w. ohne Ende. Z. B. $p = 1$ und $c = 2$ erhält man: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 etc.

Beweis. Da nemlich nach der Voraussetzung $c > p$ ist, so ist jede folgende Größe größer als jede der vorhergehenden (§. 32.); und da p jede Größe bedeutet, die kleiner als c ist, so ist auch zwischen zwey nächsten Größen, z. B. zwischen c und $c + p$, zwischen $c + p$ und $c + c$, keine Größe möglich, die größer als die vorhergehende, und zugleich kleiner als die nächstfolgende wäre.

§. 47.

§. 47.

Zus. Wenn man also das Vielfache von c überhaupt durch mc ausdrückt, so ist, wenn $b > c$ ist, entweder $b = c + p$, oder $b = mc$, oder $b = mc + p$. Z. B. $c = 2$; $m = 10$; $p = 1$; so ist, wenn b entweder $= 3$ oder 20, oder 21 ist, alsdann $3 = 2 + 1$, oder $20 = 10 . 2$, oder $21 = 20 + 1$. Wenn also $b > c$, aber c kein Maaß von b ist, so ist entweder $b = c + p$, oder $b = mc + p$, denn in diesem Fall ist nicht $b = mc$. Z. B. 2 ist kein Maaß von 3, so ist $3 = 2 + 1$ oder $21 = 20 + 1$ (§. 16.). Wenn $b > c + c$, und c kein Maaß von b ist, so giebt es allemal ein solches Vielfaches mc, daß zwar $mc < b$, aber schon $mc + c > b$ ist. Z. B. $b = 5$ und c kein Maaß von 5, so ist, wenn $m = 2$, $2 — 2 < 5$; aber $2 . 2 + 2 = 6$, und $6 > 5$.

§. 48. Commensurable, incommensurable, Rational-, Irrational-Größen.

Erklär. Wenn zwey gleichartige Größen a und b sich durch irgend ein gemeinschaftliches Maaß c erzeugen lassen, so heißen sie commensurable Größen, oder Rationalgrößen. Im entgegengesetzten Falle aber werden sie incommensurable Größen, oder Irrationalgrößen genannt. Z. B. 6 und 8 sind rationale Größen, weil ihr gemeinschaftliches Maaß 2, wenn es dreymal genommen wird, die 6, und wenn 4mal genommen wird, die 8 erzeugt; hingegen sind 6 und Quadratwurzel von 8 keine commensurable Größen, weil es keine Zahl giebt, die so, wie vorhin die 2, beide Größen aus sich erzeugen ließe.

§. 49.

Zus. Wenn also zwey Größen einander gleich, oder die eine ein Maaß der andern ist, so sind sie Ra-

tionalgrößen; denn wenn z. B. a ein Maaß von b ist, so ist auch jedes Maaß von a ein Maaß von b. Z. B. 6 ist ein Maaß von 12, und so ist auch 3 sowohl ein Maaß von 6, als von 12 (§. 17.). Zwey Irrationalgrößen sind allemal ungleich, und keine kann ein Maaß von der andern seyn. Z. B. die Quadratwurzel von 3 ist kein Maaß von der Quadratwurzel von 6.

§. 50.

Lehrs. Zwey gleichartige endliche Größen können Irrationalgrößen seyn. Z. B. Quadratwurzel von 3 und Quadratwurzel von 6, deren Unterschied p sich durch eine Linie darstellen läßt, wie aus der Geometrie erhellen wird.

Beweis. Man nehme von der einen Größe b irgend ein Maaß c an, und setze, c sey zugleich ein Maaß von einer gleichartigen endlichen Größe a, und kleiner als a; eine andere p aber sey noch kleiner als c; so ist c kein Maaß von $a + p$ (§. 33.), folglich läßt sich, wofern p kleiner ist als jedes Maaß c, das man von b annehmen mag, kein gemeinschaftliches Maaß von b und $(a + p)$ annehmen, also sind in diesem Falle die Größen b und $(a + p)$ Irrationalgrößen. Nun aber läßt sich allerdings eine Größe p denken, die kleiner ist als jedes Maaß c, das man von b annehmen mag (§. 26.), also kann es zwey Größen a und $(a + p)$ geben, welche Irrationalgrößen sind.

§. 51.

Lehrs. Wenn die endlichen Größen a, b Irrationalgrößen sind, und $b > a$ ist, so giebt es für jeden aliquoten Theil c, den man von a annimmt, ein solches Vielfaches mc, daß $mc < b$, aber $mc + c > b$ ist. Z. B. man nehme 2 Quadraten, wovon

eins

eins 3 und das andere 6 Fuß im Flächenmaaß hält, so wird die Seite des letztern, b, größer seyn, als die des erstern, a; und diese Seiten sind Irrationalgrößen; die Hälfte nun, die man von der Seite des erstern Quadrats nimmt, wird, zweymal genommen, kleiner als die Seite des letztern Quadrats, aber 3mal genommen, größer als dieselbe seyn.

Beweis. Weil nemlich $b > a$, und nach der Voraussetzung c ein aliquoter Theil von a ist, so ist $b > c + c$ und c kein Maaß von b (§. 48.), also giebt es allemal ein solches Vielfaches mc, daß $mc < b$, aber $mc + c > b$ ist (§. 47.).

§. 52.

Lehrs. Wenn die endlichen Größen a, b Irrationalgrößen sind, und $b > a$ ist, so giebt es für jeden aliquoten Theil c, den man von a annimmt, ein solches Vielfaches mc, daß $b - mc < c$ ist. Z. B. man nehme von der kleinern der vorerwehnten Quadratseiten die Hälfte c zweymal, d. i. m mal, so wird dieses Duplum, von der größern Quadratseite b abgezogen, einen Rest lassen, welcher kleiner als c ist.

Beweis. Es giebt nämlich ein solches mc, daß $mc < b$, aber $mc + c > b$ ist (§. 51.). Da also $mc < b$, folglich $b = mc + p$ (§. 28.), aber $mc + c > b$ ist, so ist $mc + c > mc + p$, folglich $c > p$ (§. 44.). Nun ist $b = b - mc$ (§. 38.), folglich $c > b - mc$; also $b - mc < c$.

§. 53. Messen.

Erklär. Eine Größe b durch eine andere gleichartige a, die man zum Maaße oder zur Einheit annimmt, messen, heißt bestimmen, wie vielmal entweder das Maaß a selbst, oder ein angenommener aliquoter Theil desselben genommen werden muß, um die Größe b zu erzeugen.

§. 54.

Zus. Wenn b und a Rationalgrößen sind, so läßt sich b entweder durch das Maaß a selbst, oder durch irgend einen aliquoten Theil desselben genau messen (§. 48.). Sind dagegen b und a Irrationalgrößen, so läßt sich b weder durch a selbst, noch durch irgend einen aliquoten Theil, den man von a annehmen mag, genau messen. Indessen läßt sich die Quantität von b doch immer genauer finden, je kleiner man den aliquoten Theil vom Maaße a nimmt, nämlich so, daß die gefundene von der wahren immer weniger unterschieden ist, als die Größe des angenommenen aliquoten Theils beträgt (§. 52.). Wenn man z. B. sucht, wie vielmal der millionste Theil des Maaßes a genommen werden muß, um die Größe b zu erzeugen, so ist die gefundene Größe von der wahren weniger unterschieden, als der millionste Theil von a beträgt.

§. 55. Zahl. Rational=, Irrational=Zahl.

Erklär. Die bestimmte Menge, welche anzeigt, wie vielmal zur Erzeugung der Größe b entweder das angenommene Maaß a selbst, oder wie vielmal der angenommene aliquote Theil von a theils zur Erzeugung von a, theils zur Erzeugung von b genommen werden muß, heißt eine Zahl. Läßt sich diese Menge durch endlichviele Wiederholungen irgend eines aliquoten Theils vom Maaße genau bestimmen, so heißt sie eine Rationalzahl. Läßt sie sich hingegen auf diese Art zwar nicht genau, aber doch immer genauer bestimmen, je kleiner der aliquote Theil des Maaßes a angenommen wird, so heißt die zur Erzeugung der Größe b erforderliche Menge, als bestimmt gedacht, eine Irrationalzahl (numerus surdus).

§. 56.

Zus. Hieraus ergiebt sich, 1) daß jede Zahl eine Größe ist, 2) daß sich die Größe einer Irrationalzahl niemals genau bestimmen läßt, 3) daß alle Größenmessung oder Bestimmung der Quantität einer Größe blos vermittelst der Zahlen möglich ist (§. 53.).

§. 57. Arithmetik.

Erklär. Eine Größe, deren Quantität durch eine Zahl bestimmt wird, heißt eine gezählte Größe; und die Wissenschaft der Zahlen und der gezählten Größen heißt die Arithmetik, auf welcher folglich alle Größenmessung beruht (§. 56.).

BB. a. Die Arithmetik.

1. Von ganzen Zahlen.

§. 58. Einer, Zehner, Hundert ꝛc. Ziffern.

Erklär. Jede bestimmte Menge, welche anzeigt, wie vielmal zur Erzeugung einer Größe b das Maaß oder die Einheit a selbst genommen werden muß, heißt eine ganze Zahl (numerus integer). Die Namen und Zeichen dieser Zahlen sind bekannt.

Die Zahl eins, welche das Maaß vorstellt, durch dessen successive Addition alle übrige ganze Zahlen erzeugt werden, nennt man in dieser Rücksicht einen Einer, und so bestimmt jede ganze Zahl zugleich die Menge der Einer, die sie enthält, z. B. zehn heißt soviel als zehen Einer oder zehnmal Eins u. s. w.

Um nun aber die Quantität großer Zahlen bequem zu übersehen, zählt man nach einer willkührlichen Annahme die Einer nicht weiter als bis auf zehn, alsdann nimmt man zehn Zehner als ein neues Maaß, oder als eine zusammengesetzte Einheit der ersten Ordnung an, und nennt sie einen Zehner. Zehn Zehner nimmt man wieder als ein größeres Maaß oder als eine Einheit der zweyten Ordnung, und nennt sie Hundert. Auf ähnliche Art giebt zehn hundert oder Tausend eine Einheit der dritten Ordnung; zehnmal zehntausend oder hunderttausend eine Einheit der vierten; tausendmal tausend, oder Million, eine Einheit der sechsten Ordnung. Nach eben dieser Art nimmt man zehn Millionen, hundert Millionen, tausend Millionen, immer als neue größere Maaße, oder als Einheiten der siebenten, achten, neunten Ordnung u. s. w. Tausendmal tausend Millionen nennt man eine Billion; tausendmal tausend Billionen eine Trillion; tausendmal tausend Trillionen eine Quadrillion u. s. f.

Die Zeichen, durch welche man die Zahlen, imgleichen den Mangel einer Zahl im Schreiben ausdrückt, heißen Ziffern. Nach unserer Art, nur immer bis zehn zu zählen, braucht man nicht mehr als folgende Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, von welchen die neun ersten die Zahl der Einheiten bis auf neun bezeichnen, die letzte aber, welche Null heißt, anzeigt, daß von einer gewissen Art von Einheiten keine Zahl vorhanden ist.

Vermittelst dieser zehn Ziffern bezeichnet man alle mögliche ganze Zahlen folgendergestalt. Man weiset jeder Art von Einheit nach ihrer Ordnung eine besondere Stelle an, und zwar so, daß man die Stellen von der Rechten gegen die Linke zählt. In die erste Stelle setzt man die Ziffer, welche die Zahl der Einer aus-

ausdrückt, in die zweyte die Ziffer der Zehner, in die dritte die der Hunderter, u. s. w.

Auf diese Art ist jede Zahl ein Ganzes, das aus Einern, Zehnern, Hundertern ꝛc. zusammengesetzt ist, oder die Summe derselben. Z. B. 8 heißt 8 Einer; 84 heißt 4 Einer + 8 Zehner, oder vier und achtzig; 840 heißt 8 hundert + 4 Zehner + 0 Einer, oder achthundert und vierzig; 8403 heißt 8 tausend + 4 hundert + 0 Zehner + 3 Einer, oder achttausend vierhundert und drey ꝛc.

Wenn man also nach jeder dritten Stelle ein Comma, und über die Ziffer nach dem zweyten Comma einen kleinen Strich; über die nach dem vierten Comma zwey Striche; über die nach dem sechsten drey, nach dem achten vier u. s. w. setzt, so bedeutet die Ziffer mit einem Striche Millionen, die mit zwey Strichen Billionen, die mit drey, Trillionen u. s. w., und man kann hiernach sowohl jede gegebene Zahl schreiben, als jede geschriebene aussprechen. Z. B.

$$3\overset{''''}{8},507,06\overset{'''}{8},243,71\overset{''}{0},359,62\overset{'}{7},005,456$$

heißt: acht und dreyßig Quadrillionen, fünfhundert und sieben tausend und acht und sechzig Trillionen, zweyhundert drey und vierzig tausend, sieben hundert und zehen Billionen, dreyhundert neun und funfzig tausend sechshundert sieben und zwanzig Millionen, fünf tausend vierhundert sechs und funfzig.

§. 59.

Zus. Jede Zahl ist die Summe der nächstvorhergehenden und der Zahl 1. Jede ganze Zahl n ist n mal so groß als 1 oder 1 mal n, indem sie die Menge der in ihr enthaltenen Einer bestimmt.

§. 60. Addiren und Subtrahiren ganzer Zahlen.

Zus. Eine ganze Zahl, z. B. 3, wird zu einer andern, z. B. 24, addirt, wenn man nach und nach die Einer, die jene enthält, zu dieser addirt, nemlich $24 + 3 = 24 + 1 + 1 + 1$. Eine kleinere Zahl u wird von einer größern n subtrahirt, wenn man zur kleinern u nach und nach so viel Einer addirt, bis die Summe der größern Zahl n gleich wird, und denn die Menge dieser addirten Einer bestimmt. Z. B. wenn 4 von 7 subtrahirt werden soll, so ist $4 + 1 + 1 + 1 = 7$, und $1 + 1 + 1 = 3$, also $7 - 4 = 3$. Es ist deshalb sowohl die Summe als Differenz ganzer Zahlen selbst eine ganze Zahl.

§. 61.

Zus. Gleichartige gezählte Größen werden zusammenaddirt, wenn man die ganzen Zahlen addirt, durch welche ihre Quantität ausgedrückt ist, d. i. $7a + 3a = (7 + 3)a = 10a$; $ma + na = (m + n)a$; $ma + a = (m + 1)a$. oder 4mal 10 + 3mal 10 $= (4 + 3) . 10$, d. i. 7mal 10 = 70.

§. 62.

Zus. Gleichartige gezählte Größen werden von einander subtrahirt, wenn man die ganzen Zahlen, durch welche sie ausgedruckt sind, von einander subtrahirt, d. i. $7a - 3a = (7 - 3)a = 4a$; $ma - na = (m - n)a$; $ma - a = (m - 1)a$. Z. B. von 7mal 10 abgezogen 3mal 10, bleibt $(7 - 3) . 10 = 4 . 10 = 40$.

§. 63. Entstehung des Begriffs von Zahl.

Anmerk. Wir kommen, wie man aus dem Bisherigen sieht, zum Begriffe sowohl der Zahl 1, als aller übrigen ganzen Zahlen, blos auf folgende Art: Wir

Wir denken uns irgend ein Ding, z. B. eine Kugel a, zu dieser eine andere b, zu dieser wieder eine andere c, und zwar so, daß wir dabey von aller Verschiedenheit gänzlich abstrahiren, und jedes von diesen Dingen blos als eine Kugel betrachten. So lange wir aber noch jede für sich betrachten, und blos denken: a ist eine Kugel, b ist eine Kugel, c ist eine Kugel, so denken wir noch gar nicht an eine Zahl oder Menge, sondern diesen Begriff erzeugen wir erst dadurch, daß wir die Kugeln a, b und c nach und nach zusammennehmen, und nun sagen wir erst: jede von diesen zusammengenommenen Kugeln ist eine, die Kugeln a, b und c zusammen, als eine Größe oder als ein Ganzes betrachtet, sind mehrere; und zwar, wenn ich a und b zusammen habe, so enthält das Ding, was ich habe, zwey Kugeln; a, b und c sind ein Ganzes von drey Kugeln u. s. w.

§. 64. Dekadik.

Anm. Merkwürdig ist der Kunstgriff, aus einer gewissen Zahl von Einheiten immer neue Maaße, oder größere Arten von Einheiten zu machen, denn hierdurch erhalten wir den Vortheil, daß wir nicht nur aus wenigen Namen gewisser Zahlen die Namen aller übrigen auf eine höchst kurze und leichte Art zusammensetzen, sondern uns auch von der Quantität sehr großer Zahlen eine geschwinde anschauliche Vorstellung machen können. Daß wir gerade bis zehn zählen, und daher für jedes größere Maaß das Zehnfache vom nächstvorhergehenden annehmen, ist an sich willkührlich, denn man könnte eben sowohl bis 2, 3, 4 u. s. w. zählen, und so immer das zweyfache, dreyfache, vierfache ꝛc. zu einem neuen Maaße annehmen. So werden z. B. in Leibnitzens Dyadik alle Zahlen durch 1 und 0 ausgedruckt, indem nemlich die 1 in jeder Stelle weiter zur Linken doppelt soviel gilt,

gilt, als in der nächstvorhergehenden zur Rechten. In Weigels Tetraktik werden alle Zahlen durch 1, 2, 3 und 0 dargestellt, und zwar nach dem allgemeinen Gesetz, daß jede Ziffer in einer Stelle weiter zur Linken viermal so viel gilt, als sie vorher gegolten hatte. Auf die Dekadik ist man wahrscheinlich durch die zehn Finger unserer Hand gekommen. Da wir nämlich an diesen beständig eine ganz anschauliche Vorstellung von der Größe der Zahl zehn haben, so lernen wir bald die Größe von zehn Einheiten sehr schnell und gleichsam mit einem Blicke übersehen, und daher wird uns dieses auch bey der Vorstellung von 10 Zehnern, oder von hundert, bey der von 10 hundert oder Tausend u. s. w. sehr leicht, und so können wir uns die anschauliche Vorstellung von Millionen, Billionen ꝛc. in sehr wenigen Augenblicken verschaffen. In der Dyadik und Tetraktik würden wir uns die Vorstellung von einer großen Zahl weit langsamer bilden. Deshalb ist auch wol die Dekadik von je her bey den meisten Völkern üblich gewesen. Die Dyadik sollen ehemals die Chinesen, und die Tetraktik nach dem Zeugniß des Aristoteles die alten Thracier gebraucht haben.

§. 65.

Anm. Nicht minder wichtig ist die Kunst, eine so große Menge von Begriffen, als die Verschiedenheit der Zahlen enthält, durch nicht mehr als 10 Ziffern auf eine so leichte und zum Rechnen so äußerst bequeme Weise blos vermittelst ihrer verschiedenen Stellungen auszudrucken, denn dieses ist ein wahres Muster der Bezeichnungskunst (ars characteristica). Der steigende Werth von der Rechten zur Linken zeigt, daß sie morgenländischen Ursprungs ist.

§. 66. Addiren ganzer Zahlen.

Aufgabe. Mehrere gegebne ganze Zahlen zu addiren.

Auflös. Man schreibe sie dergestalt unter einander, daß die Einer unter Einern, Zehner unter Zehnern ꝛc. zu stehen kommen, und ziehe unten einen Strich. Da nun keine gegebne Zahl der Einer, Zehner ꝛc. die Zahl 9 übersteigt (§. 58.), so addire man nach und nach die Zahlen aller Einer, Zehner, Hunderter ꝛc. besonders, indem man zur ersten Zahl die Einheiten der folgenden nach und nach setzt, und sie in eine Zahl verwandelt.

Ist nun erstlich jede gefundene einzelne Summe, die letzte nicht mitgerechnet, kleiner als 10, so schreibe man jede unter die addirte Reihe, und die ganze gefundene Zahl wird die verlangte Summe seyn. Z. B.

```
          8432
          7025
           241
         -----
Summe:   15698.
```

Beweis. Da nämlich die Einer, Zehner ꝛc. als Maaße oder Quanta betrachtet werden (§. 58.), folglich gezählte Größen sind (§. 57.), so werden sie addirt, wenn man ihre Zahlen addirt (§. 61.). Nun ist jede von den gegebnen Zahlen ein Ganzes, das aus den Einern, Zehnern ꝛc., die sie enthält, zusammengesetzt ist (§. 58.), folglich allen ihren Einern, Zehnern ꝛc. zusammen gleich (§. 9.). Wenn man also alle Einer, Zehner ꝛc. addirt, so ist es eben so viel, als wenn man diese selbst addirt (§. 29.).

Zweytens, wenn die als Summen gefundenen einzelnen Zahlen einen oder mehrere Zehner enthalten, so setzt man blos die Ziffer der Einer unter die addirte Reihe, die Zehner aber addirt man zur nächstfol-

folgenden Reihe, so hat man auch hier die verlangte Summe. Z. B.

82736
39548
45867
67535
235686.

Hier ist die Summe der ersten Reihe 26, also schreibt man unter sie blos die 6 Einer, die 2 Zehner aber addirt man zur nächstfolgenden Reihe, u. s. w.

Beweis. Die Zehner, die man auf diese Art bekommt, sind allemal mit den Zahlen der nächstfolgenden Reihe gleichartig (§. 58.); es ist also einerley, ob man sie zu diesen sogleich, oder erst nachher addirt (§. 31.). Z. B. bey der vorigen Addition sollte das Verfahren eigentlich so seyn:

82736
39548
45867
67535
26
16
25
23
21
235686.

§. 67.

Anm. Um sich von der Richtigkeit der Summe zu versichern, addirt man noch einmal von oben herunter, wenn man zuerst hinaufwärts addirt gehabt hat. Bey einer langen Reihe kann man auch die Posten in kleinern Abtheilungen addiren, und sodann diese Partialsummen durch eine neue Addition in eine Totalsumme bringen.

§. 68. Subtrahiren ganzer Zahlen.

Aufgabe. Eine gegebne ganze Zahl von einer gegebnen größern zu subtrahiren.

Auflös. Man schreibt die kleinere Zahl unter die größere, wie bey der Addition, und zieht einen Strich. Ist nun

1) keine von den untern Ziffern größer als diejenige, die über ihr steht, so subtrahire man, da keine von ihnen über 9 betragen kann, jede untere von ihrer obern, indem man zur kleinern so viele Einheiten addirt, bis die Summe der gegebnen größern Zahl gleich wird, da dann die Menge der addirten Einheiten die gesuchte Differenz ist. Z. B. 8756
2304
Differenz: 6452.

Beweis. Nach diesem Verfahren geben alle Einer, Zehner u. s. w. des Subtrahends mit denen der gefundenen Zahl so viel als die des Minuends; deshalb ist die Summe des Subtrahends und der gefundenen Zahl dem Minuend gleich (§. 66.), also ist die gefundene Zahl die verlangte Differenz (§. 36.).

2) Ist aber irgend eine untere Ziffer größer als ihre obere, so vermehre man die obere um 10, und die nächstfolgende zur Linken vermindere man um 1, welches letztere man durch einen ihr beygesetzten Punct zu bemerken pflegt; da nun die untere nie über 9 seyn kann, so subtrahire man sie von der um 10 vermehrten obern, wie in Nr. 1. Z. B. 5·6·3·7
2 8 7 9
2 7 5 8.

Beweis. Da eine jede höhere Einheit zehn Einheiten der nächstvorhergehenden Zahl gleich ist (§. 58.), so ist, wenn man im Minuend zu irgend einer Zahl 10 addirt, und von der nächstfolgenden 1

sub-

subtrahirt, dieses eben so viel, als wenn man zu ihm eben dieselbe Zahl zugleich addirt und von ihm subtrahirt; z. B. wenn man bey obiger Rechnung zu den 7 Einern des Minuends 10 Einer addirt, aber zugleich von seinen 3 Zehnern 1 Zehner abzieht, so ist dieses eben so viel, als wenn man zum Minuend 10 Einer addirt, und zugleich 10 Einer subtrahirt; also bleibt die Größe des Minuends ungeändert, und man gewinnt gleichwohl den Vortheil, daß man jetzt die untere Zahl von der um 10 vermehrten obern subtrahiren kann.

3) Wenn endlich auf die obere Zahl, welche eine größere untere hat, eine oder mehrere Nullen nach einander folgen, so verwandle man jede dieser Nullen in 9, und vermindere die zunächst auf sie folgende Zahl um 1. Z. B. 3˙9˙0˙0˙0˙4 6

1 9 1 9 0 8 2

1 9 8 0 9 6 4.

Beweis. Da nämlich hier jede 0 um 1 vermindert werden soll, so verwandelt sie sich, wenn man sie um 10 vermehrt, in 9.

§. 69.

Zus. Wenn man die Probe machen will, ob die gefundene Zahl die wahre Differenz ist, so addirt man sie zur kleinern Zahl. Ist die Summe der größern gleich, so hat man die wahre Differenz (§. 36.).

§. 70. Multipliciren. Multiplicator. Multiplicand. Factoren. Product. Factum.

Erklär. Eine Größe a durch irgend eine Zahl n multipliciren, heißt eine Größe p finden, die aus der Größe n auf eben die Art erzeugt wird, als die Zahl n aus der 1. Die beiden gegebnen Größen, a, n, heißen die Factoren. Die Größe a, welche multipli-

tiplicirt werden soll, heißt der **Multiplicand**, die Zahl n, durch welche multiplicirt werden soll, der **Multiplicator**, und die Größe p, die gefunden werden soll, das Product oder Factum. Die Bestimmung des Products heißt die Multiplication. Das Zeichen derselben ist ein $\times$, oder ein Punct zwischen dem Multiplicand und Multiplicator. Z. B. $a \times n$ oder $a . n$, oder bey Buchstabengrößen noch gewöhnlicher $a\,n$, ohne alles weitere Zeichen, heißt: a soll mit n multiplicirt werden. Z. B. $3 \times 4 = 12$, oder $2 . 3 = 6$.

§. 71.

Zus. Wenn man Gleiches mit Gleichem multiplicirt, so sind die Producte gleich; d. i. wenn $a = b$ und $m = n$, so ist auch $am = bn$. Denn im Satze am läßt sich b für a, und n für m, folglich bn für am setzen, folglich ist $am = bn$ (§. 6.). Z. B.

1 Rthlr. = 24 Gr.
3 = 3
3 Rthlr. = 72 Gr.

§. 72.

Zus. Da das Product aus dem Multiplicand erzeugt werden soll, so sind beide gleichartig, und können daher eine Größe seyn, von welcher Art man will, z. B. eine Linie, ein Buch ꝛc. Da hingegen der Multiplicator aus der Zahl 1 erzeugt werden soll, so muß der Multiplicator jederzeit eine bloße unbenannte Zahl seyn.

§. 73.

Lehrs. Eine Größe a wird durch eine ganze Zahl n multiplicirt, wenn man sie n mal nimmt, oder n mal zu sich selbst addirt. Z. B. $a . 3 = 3a = a + a + a$. Z. B. 3 Rthlr. = 1 Rthlr. + 1 Rthlr. + 1 Rthlr.

Beweis. Es soll das Product $a \times n$ aus a auf eben die Art erzeugt werden, wie die ganze Zahl n aus der Zahl 1 (§. 70.); diese aber wird aus der 1 dergestalt erzeugt, daß $n = n \times 1$ ist, d. i. wenn man die Zahl 1, n mal nimmt. Also wird das Product $a \times n$ aus der Größe a erzeugt, wenn man dieses n mal nimmt, d. i. wenn man es n mal zu sich selbst addirt (§. 12.). Z. B. 624 durch 3 multipliciren, heißt, 624 dreymal zu sich selbst addiren:

$$\begin{array}{r} 624 \\ 624 \\ 624 \\ \hline \text{Product: } 1872. \end{array}$$

§. 74.

Zus. Also ist das Product zweyer ganzen Zahlen selbst eine ganze Zahl, und wenn der Multiplicator 1 ist, so ist das Product dem Multiplicand gleich, d. i. $a \times 1 = a$, denn $a \times 1 = 1a = a$ (§. 58.).

§. 75.

Zus. Die Summe zweyer Größen wird durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man jede von denselben durch sie multiplicirt und die Producte addirt; d. i. $(a + b) . n = an + bn = na + nb$. Denn wenn man die Summe $a + b = c$ setzt, so ist $a + b + a + b = c + c$, folglich $2a + 2b = 2c = 2(a + b)$; setzt man also statt 2 jede beliebige Zahl n, so erhält man $na + nb$. Z. B.

1 Rthlr. + 4 Gr
multipl. durch 3
giebt 3 Rthlr. + 12 Gr.

§. 76.

Zus. Auf ähnliche Art wird auch die Differenz zweyer Größen durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man jede von ihnen durch sie multiplicirt, und das

das kleinere Product vom größern abzieht; d. i. $(a-b).n = an - bn = na - nb$, welches ganz auf die vorige Art mehr ins Licht gesetzt werden kann.

Z. B. 2 Gr. — 3 Pf.
multipl. durch 3
giebt 6 Gr. — 9 Pf.

§. 77.

Zus. Eine Größe wird durch die Summe ganzer Zahlen multiplicirt, wenn man sie durch jede einzelne multiplicirt und die Producte addirt; d. i. $a \times (m + n) = am + an = ma + na$. Denn $ma + na = (m + n)a = a(m + n)$. Eben die Bewandtniß hat es, wenn eine Größe durch die Differenz zweyer ganzen Zahlen zu multipliciren ist.

Z. B. 2 Rthlr.
multipl. durch 3 + 4
giebt 6 Rthlr. + 8 Rthlr. = 14 Rthlr.

§. 78.

Zus. Eine Größe wird durch ein Product ganzer Zahlen multiplicirt, wenn man sie nach und nach durch jeden Factor multiplicirt. Z. B. wenn $6 = 3.2$ ist, so ist $a.6 = a.3.2 = 3a.2$; denn $3a \times 2 = 3a + 3a = (3 + 3)a = 3.2a = 6a = a6$. Z. B. 3 Rthlr. multiplicirt mit 2.4, giebt 3mal 2 = 6 und 6mal 4 = 24.

§. 79.

Zus. Ein Product ganzer Zahlen ist dasselbe, man mag den ersten Factor durch den andern, oder den andern durch den ersten multipliciren; d. i. $m \times n = n \times m$; denn da $m = 1.m = m.1$ (§. 59.), $m \times 2 = m \times 1 + m \times 1$ (§. 77.) $= 1 \times m + 1 \times m = 2 \times n$ (§. 75.), also auch überhaupt $mn = nm$. Z. B. 3 Rthlr. 4mal genommen giebt eben sowohl 12 Rthlr., als wenn man 4 Rthlr. 3mal nimmt.

§. 80.

Zus. Eine ganze Zahl wird durch 10, 100, 1000 ꝛc. multiplicirt, wenn man ihr zur Rechten die Nullen des Multiplicators anhängt. Z. B. 427 ⋊ 10 = 4270, oder 427 ⋊ 100 = 42700 ꝛc. Denn eine angehängte 0 verwandelt die 427 Einer in 427 Zehner (§. 58.); da nun 1 Zehner = 10 Einer, so sind 427mal 1 Zehner = 427mal 10 Einer (§. 71.); d. i. 4270 = 10 ⋊ 427 = 427 ⋊ 10. Eben so erhellet es auch von den übrigen.

§. 81. Einmaleins.

Erklär. Eine Tafel, welche alle Producte enthält, welche erzeugt werden, indem man von den ersten 9 ganzen Zahlen eine jede mit einer jeden multiplicirt, heißt das Einmaleins, imgleichen von ihrem Erfinder, der Rechentisch des Pythagoras (abacus Pythagoricus). Man kann also dieses Einmaleins verfertigen, wenn man jede der 9 ersten Zahlen nach und nach zu sich selbst addirt, bis man sie 9mal genommen hat.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 82.

Aufgabe. Eine gegebne ganze Zahl durch eine andere zu multipliciren.

Auflös. I. Wenn eine von ihnen nur aus einer Ziffer besteht, so setze man sie unter die Einer der andern, ziehe darunter einen Strich, und schreibe unter demselben aus dem Einmaleins alle Producte der untern Zahl in jede Ziffer der obern (§. 81.), so daß man jedesmal, wie bey der Addition, blos die Einer hinsetzt, die Zehner aber zum nächsten Product addirt. Z. B. 5728

$$\begin{array}{r} 5728 \\ 3 \\ \hline 17184. \end{array}$$

Beweis. Erstlich ist es gleichviel, ob man die größere Zahl durch die kleinere, oder diese durch jene multiplicirt (§. 79.). Ferner wird die obere Zahl durch die untere multiplicirt, wenn man jene so vielmal zu sich selbst addirt, als diese Einheiten in sich enthält, man sollte also verfahren, wie in §. 73. Allein wenn man die Producte der Einer, Zehner &c. der obern Zahl in die untere aus dem Einmaleins nimmt, so hat man die obere so vielmal zu sich selbst addirt, als die untere Einheiten enthält (§. 81.). Also hat man die obere Zahl durch die untere richtig multiplicirt.

II. Enthält jede der beiden gegebnen Zahlen mehr als eine Ziffer, so schreibe man wieder die kleinere unter die größere, so daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner &c. kommen, multiplicire nach No. I. die obere Zahl durch jede Ziffer der untern, schreibe die einzelnen Producte so unter einander, daß die erste Ziffer jedesmal unter die Zahl kommt, mit welcher man multiplicirt, und addire dann alle Producte zusammen, so hat man das verlangte ganze Product.

z. B.

$$\begin{array}{r} 5728 \\ 576 \\ \hline 34368 \\ 40096 \\ 28640 \\ \hline 3299328. \end{array}$$

Beweis. Da die untere Zahl 576 = 6 + 7 . 10 + 5 . 100 ist (§. 58.), so wird die obere dadurch multiplicirt, wenn man sie durch itzt angegebene Theile der untern multiplicirt (§. 71.), folglich wenn man sie erstlich durch 6, dann durch 7 multiplicirt, und zum letzten Product 0 setzt, und endlich durch 5, und zum Product 00 setzt (§. 77. 78. 80.); allein wenn man auf die vorgeschriebene Art verfährt, so ist das letztere geschehen, denn es ist nicht nur durch 6, 7, 5 multiplicirt worden, sondern das zweyte Product bedeutet 400960, und das dritte 2864000 (§. 58.), also ist die Multiplication richtig.

§. 83.

Zus. Weil 576 aus den Factoren 8 . 8 . 9 besteht, so kann man nach §. 78. die Zahl 5728 erstlich durch 8, dann das Product wieder durch 8, und dieses endlich durch 9 multipliciren:

$$\begin{array}{rl} 5728 & \cdot 8 \\ \hline 45824 & \cdot 8 \\ \hline 366592 & \cdot 9 \\ \hline 3299328 & \end{array}$$

Weil ferner 8 = 2 . 2 . 2, und 9 = 3 . 3, so kann man auch die Zahl nach und nach durch 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3 multipliciren.

§. 84.

§. 84.

Zus. Wenn in der untern Zahl Nullen vorkommen, so werden die am Multiplicator hängenden während der Multiplication aus der Acht gelassen, und nach Endigung derselben an das Product angehängt (§. 80.). Sind sie aber zwischen den geltenden oder Zahl-Ziffern des Multiplicators befindlich, so werden sie bey der Multiplication ganz übergangen, weil jede Multiplication mit denselben auch nur wieder 0 zum Product bringen würde, denn wenn man eine Zahl keinmal nimmt, so erhält man nichts. Man soll z. B. 6413 mit 2005000 multipliciren:

```
      6413
   2005000
  --------
     32065
  12826
  -----------
  12858065000.
```

Eigentlich sollte dies so stehen:

```
      6413
      2005 × 1000
  --------
     32065
     0000
    0000
  12826
  --------
  12858065000.
```

§. 85. Theile ganzer Zahlen.

Erklär. Eine Größe a heißt der nte Theil von b, wenn sie, n mal genommen, die Größe b giebt, vorausgesetzt, daß n eine ganze Zahl ist. Z. B. a heißt der 4te Theil von b, wenn a, viermal genommen, b giebt. Eben so heißt a der nte Theil von b,

wenn $b = an$ ist, oder wenn a, indem es n mal zu sich selbst addirt wird, b giebt, oder a ist der 4te Theil von b, wenn $b = a \times 4 = 4a = a + a + a + a$ ist.

§. 86. Dividiren, Dividend, Divisor, Quotient.

Erklär. Eine Größe a durch irgend eine Zahl n dividiren, heißt, eine Größe q finden, die, durch n multiplicirt, die Größe a giebt. Die Größe a, welche dividirt werden soll, heißt der Dividend; die Zahl n, durch welche a dividirt werden soll, der Divisor, und die gesuchte Größe q der Quotient. Die Bestimmung des Quotienten wird die Division genannt. Das Zeichen der Division besteht in zwey übereinanderstehenden Puncten, oder gewöhnlicher in einem Queerstrich, den man zwischen Dividend und Divisor zieht. Z. B. $a:n$ oder $\frac{a}{n}$ heißt: a soll durch n dividirt werden; d. i. $\frac{12}{3} = 4$.

§. 87.

Zus. Wenn man also den Quotienten durch den Divisor multiplicirt, so bekommt man den Dividend; d. i. wenn $\frac{a}{n} = q$ ist, so ist $nq = a$. Wenn man aber ein Product durch den Multiplicator dividirt, so bekommt man den Multiplicand, d. i. wenn $nq = a$ ist, so ist $\frac{a}{n} = q$, oder wenn $\frac{12}{3} = 4$, so ist $4 \cdot 3 = 12$.

§. 88.

Zus. Wenn man eine Größe durch eben dieselbe Zahl erst dividirt und hernach multiplicirt, so bleibt

bleibt seine Größe unverändert, d. i. $\frac{a}{n} \rtimes n = a$ (§. 87.). Und wenn man eine Größe durch eben dieselbe Zahl erst multiplicirt und hernach wieder dadurch dividirt, so bleibt sie unverändert; d. i. $\frac{an}{n} = a$, oder $\frac{3 \cdot 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$.

§. 89.

Zus. Da der Dividend ein Product, der Quotient einen Multiplicand, und der Divisor einen Multiplicator vorstellt, so sind Dividend und Quotient allemal gleichartig, und können daher jede Art von Größen seyn; z. B. man kann eine Linie durch 3 dividiren, d. i. eine andere Linie finden, die, 3mal genommen, die erste giebt, der Divisor aber muß in solchen Fällen allemal eine Zahl seyn. In einer andern Rücksicht kann aber auch der Divisor mit dem Dividend gleichartig, und beide deshalb jede Art von Größen seyn, alsdenn aber wird der Quotient zu einer Zahl. Z. B. man kann finden, wie vielmal eine Linie in einer andern enthalten ist, indem man angiebt, wie vielmal die letztere genommen werden muß, um die erstere hervorzubringen, oder 3 Rthlr. sind in 12 Rthlr. 4mal enthalten. Man kann aber dieses keine eigentliche Division nennen, weil bey diesem Verfahren die größere Linie nicht durch die kleinere getheilt wird, obgleich auch hier $q \rtimes n$ eben so wie $n \rtimes q = a$ ist (§. 79.). Dieses Verfahren wird gebraucht, wenn man eine Größe mit einer andern homogenen vergleichen will. Z. B. wenn man anzeigen will, daß 12 Rthlr. das 4fache von 3 Rthlr. ist.

§. 90.

Zus. Wenn der Divisor 1 ist, so ist der Quotient dem Dividend gleich, d. i. $\frac{a}{1} = a$, denn a . 1 = a (§. 74.), z. B. $\frac{4}{1} = 4$.

§. 91.

Zus. Wenn man Gleiches durch Gleiches dividirt, so sind die Quotienten gleich, d. i. wenn a = b und n = r, so ist $\frac{a}{n} = \frac{b}{r}$, dies erhellet eben so wie im Satze §. 71. Z. B. 1 Rthlr. = 24 Gr., so ist auch $\frac{1}{3}$ Rthlr. = 8 Gr. = $\frac{24}{3}$ Gr.

§. 92.

Zus. Die Summe zweyer Größen wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man jede besonders durch sie dividirt und die Quotienten addirt, d. i. $\frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}$. Denn $\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right) \times n = \frac{a}{n} \times n + \frac{b}{n} \times n$ (§. 75.) = a + b (§. 88.). Z. B. 10 Rthlr. + 20 Gr. dividirt durch 5 giebt 2 Rthlr. + 4 Gr.

§. 93.

Zus. Eben so wird auch die Differenz zweyer Größen durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man jede besonders durch sie dividirt und die Quotienten subtrahirt, d. i. $\frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}$.

Denn

Denn $\left(\frac{a}{n}-\frac{b}{n}\right) \times n = \frac{a}{n} \times n - \frac{b}{n} \times n$ (§. 76.) $= a - b$ (§. 88.). Z. B. 4 Gr. — 8 Pf. dividirt durch 2 giebt 2 Gr. — 4 Pf.

§. 94.

Zus. Wenn der Divisor eine ganze Zahl ist, so wird der Quotient durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man den Dividend durch sie multiplicirt, d. i. $\frac{a}{n} \times m = \frac{am}{n}$.

§. 95.

Zus. Wenn man Dividend und Divisor, wofern letzterer eine ganze Zahl ist, durch einerley ganze Zahl multiplicirt, so bleibt die Größe des Quotienten unverändert, d. i. $\frac{am}{nm} = \frac{a}{n}$. Denn $\frac{am}{nm}$ ist anzusehen, als ob $\frac{a}{n}$ erstlich durch m multiplicirt, und dann wieder durch eben dieses m dividirt wäre, und so erhellet der Satz aus §. 88. Z. B. $\frac{12}{4} = 3$, und $\frac{12 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{24}{8}$, auch $= 3$.

§. 96.

Zus. Wenn man Dividend und Divisor, wofern letzterer eine ganze Zahl ist, durch einerley ganze Zahl dividirt, so bleibt die Größe des Quotienten ungeändert, d. i. $\frac{\frac{a}{m}}{\frac{n}{m}} = \frac{a}{n}$. Denn man setze $\frac{a}{m} = b$

und

und $\frac{n}{m} = u$, so ist $a = bm$, und $n = um$ (§. 87.),

folglich $\frac{a}{n} = \frac{bm}{um}$ (§. 91.) $= \frac{b}{u}$ (§. 95.) $= \frac{\frac{a}{m}}{\frac{u}{m}}$. Z. B. 6 in 24 ist 4mal enthalten, also ist auch halb 6 = 3 in halb 24 = 12, 4mal enthalten.

§. 97.

Zus. Wenn der Divisor eine ganze Zahl ist, so wird der Quotient durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Divisor durch sie multiplicirt, d. i. $\frac{\frac{a}{n}}{m} = \frac{a}{nm}$. Denn $\frac{a}{nm} \times m = \frac{am}{nm}$ (§. 94.) $= \frac{a}{n}$ (§. 95.). Z. B. 4 in 24 ist 6mal enthalten; wird also der Quotient 6 halbirt, so erhält man 3; welches man auch erhält, wenn man mit dem doppelten Divisor 2 . 4 = 8 in 24 dividirt.

§. 98.

Zus. Wenn man eine größere und kleinere Größe durch einerley ganze Zahl dividirt, so ist der erste Quotient größer, als der andere, d. i. wenn $a > b$, so ist $\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$. Denn weil $a = b + c$ (§. 28.), so ist $\frac{a}{n} = \frac{b+c}{n}$ (§. 91.) $= \frac{b}{n} + \frac{c}{n}$ (§. 92.), also $\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$ (§. 28.). Z. B. 1 Rthlr. > 1 fl.

dividirt durch 4 = 4

giebt 6 Gr. > 4 Gr.

§. 99.

Zus. Wenn man einerley Größe durch eine größere und kleinere ganze Zahl dividirt, so ist der erste Quotient kleiner als der andere, d. i. wenn $n > r$ ist, so ist $\frac{a}{n} < \frac{a}{r}$. Denn man setze $\frac{a}{n} = q$, da nun $n = r + u$ (§. 28.), so ist $\frac{a}{r+u} = q$ (§. 91.), folglich $a = q \times (r + u)$ (§. 87.) $= qr + qu$ (§. 75.), folglich $a > qr$ (§. 28.), mithin $\frac{a}{r} > \frac{qr}{r}$ (§. 98.), also $\frac{a}{r} > q$ (§. 88.), d. i. $\frac{a}{n} < \frac{a}{r}$. Hinwiederum ist $n > r$, wenn $\frac{a}{n} < \frac{a}{r}$ ist.

Z. B. 1 Rthlr. = 24 Gr.
dividirt durch 6 > 4
ist 4 Gr. < 6 Gr.

§. 100.

Zus. Wenn man das Kleinere durch eine größere, und das Größere durch eine kleinere ganze Zahl dividirt, so ist der erste Quotient kleiner als der andere, d. i. wenn $a < b$ und $n > r$, so ist $\frac{a}{n} < \frac{b}{r}$; denn $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$ (§. 98.) und $\frac{b}{n} < \frac{b}{r}$ (§. 99.), also $\frac{a}{n} < \frac{b}{r}$ (§. 19.). Z. B. 1 fl. < 1 Rthlr.
dividirt durch 4 > 2
giebt 4 Gr. < 12 Gr.

§. 101.

§. 101.

Zus. Von zwey gleichen Quotienten, deren Divisores ganze Zahlen sind, hat derjenige, der einen größern Dividend hat, auch einen größern Divisor, d. i. wenn $\frac{a}{n} = \frac{b}{r}$, und $a > b$, so ist $n > r$, und wenn $n > r$ ist, so ist $a > b$. Denn wenn $a > b$ ist, so ist weder $r = n$, noch $r > n$, weil sonst in beiden Fällen $\frac{b}{r} < \frac{a}{n}$ wäre (§. 98. 100.), also $n > r$. Ist hingegen $n < r$, so ist weder $a = b$, noch $a < b$, weil sonst in beiden Fällen $\frac{a}{n} < \frac{b}{r}$ wäre (§. 99. 100.), also $a > b$. Z. B. $\frac{24}{6} = 4$ und $\frac{12}{3} = 4$. Es ist aber auch $24 > 12$, und eben so $6 > 3$.

§. 102.

Zus. Wenn man eine ganze Zahl durch sich selbst dividirt, so ist der Quotient 1, d. i. $\frac{n}{n} = 1$. Denn $1 \times n = n \times 1$ (§. 73.) $= n$ (§. 59.). Wenn man eine ganze Zahl durch eine kleinere dividirt, so ist der Quotient größer als 1; d. i. wenn $r > n$, so ist $\frac{r}{n} > 1$. Denn $\frac{r}{n} > \frac{n}{n}$ (§. 98.), also $\frac{r}{n} > 1$ (§. 101.). Wenn aber eine ganze Zahl durch eine größere dividirt wird, so ist der Quotient kleiner als 1. Z. B. $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{6}{3} = 2$, und $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, oder die Hälfte einer Einheit.

§. 103.

Zus. Wenn der Quotient zweyer ganzen Zahlen auch eine ganze Zahl ist, so ist, wenn man den Divi-

Dividend durch sie dividirt, der Quotient dem Divisor gleich, also eine ganze Zahl, d. i. wenn $\frac{r}{n} = u$, so ist $\frac{r}{u} = n$. Denn $r = un$ (§. 87.) $= nu$ (§. 79.), also $\frac{r}{u} = n$ (§. 87.). Z. B. $\frac{12}{3} = 4$, also auch $\frac{12}{4} = 3$ einer ganzen Zahl.

§. 104.

Lehrs. Eine Größe wird durch eine ganze Zahl n dividirt, wenn man den nten Theil von ihr nimmt, d. i. wenn n eine ganze Zahl ist, so ist der Quotient $\frac{a}{n}$ der nte Theil von a. Z. B. 12 durch 3 dividirt giebt 4, also ist 4 der 3te Theil von 12.

Beweis. Wenn der Quotient durch n multiplicirt wird, so erhält man a (§. 86.). Allein wenn n eine ganze Zahl ist, so wird der Quotient durch n multiplicirt, wenn man ihn n mal nimmt (§. 73.), folglich giebt der Quotient, n mal genommen, die Größe a, folglich ist derselbe der nte Theil von a (§. 85.).

§. 105.

Zus. $\frac{a}{2}$ ist also der 2te, $\frac{a}{3}$ der 3te Theil von a u. s. w., und den nten Theil von a, m mal nehmen, ist eben so viel, als ma durch n dividiren (§. 94.), d. i. den nten Theil von ma nehmen.

§. 106.

Aufgabe. Eine gegebne ganze Zahl durch eine gegebne kleinere zu dividiren.

Auflös. 1) Man setze den Divisor zur Linken des Dividends.

2) Man nehme von den höchsten Ziffern des letztern so viele, bis sie entweder dem Divisor gleich, oder größer werden, und suche, durch welche von den 9 ersten Zahlen der Divisor multiplicirt werden muß, um die Zahl der gedachten höchsten Ziffern genau, oder zunächst zu bekommen. Besteht der Divisor nur aus einer einzigen Ziffer, so findet man die verlangte Ziffer im Einmaleins (§. 81.); besteht er aber aus mehrern, so muß man ihn durch einige der 9 ersten Zahlen so lange multipliciren, bis man das verlangte Product bekommt.

3) Die auf diese Art gefundene Zahl nehme man als die erste Ziffer des Quotienten an, und das Product, welches sie giebt, wenn man den Divisor durch sie multiplicirt, schreibe man unter die erstgedachten höchsten Ziffern des Dividends, und ziehe es von ihnen ab (§. 68.).

4) Zur Differenz, welche herauskommt, setze man die nächstfolgende Ziffer des Dividends hinzu, suche die zweyte Ziffer des Quotienten eben so, wie nach Nr. 2. die erste gefunden wurde, und verfahre mit dieser eben so, wie in Nr. 3.

5) Auf gleiche Art suche man alle übrigen Ziffern des Quotienten.

6) Enthält der Divisor am Ende zur Rechten eine oder mehrere Nullen, so setze man dieselben gleich anfangs unter die Einer, Zehner ꝛc. des Dividends, und nehme blos die Zahlziffern zum Divisor an. Alsdenn geht die Division nur diejenigen Ziffern im Dividend an, unter denen keine von diesen Nullen steht.

7) Bleibt

7) Bleibt am Ende der Division nach dem Abzuge des Products aus dem Divisor in die letzte gefundene Ziffer nichts übrig, so ist die ganze Zahl, die aus den gefundenen Ziffern besteht, genau der verlangte Quotient. Bleibt aber etwas übrig, so muß noch der Quotient aus diesem Rest durch den Divisor zu jener ganzen Zahl des Quotienten hinzukommen, um denselben genau zu haben; aber dieser Zusatz des Quotienten ist kleiner als 1, indem der Rest allemal kleiner als der Divisor ist. Z. B.

```
8 | 5 3 8 7 2 | 6 7 3 4
  | 4 8 . . . |
    ---------
      5 8 . .
      5 6 . .
      -------
        2 7 .
        2 4 .
        -----
          3 2
          3 2
          ---
            0
```

oder:

```
5 | 3 5 2 0 4 5 | 7 0 4 0 9
  | 3 5 . . . . |
    ---------
        2 0 . .
        2 0 . .
        -------
            4 5
            4 5
            ---
              0
```

oder:

```
483 | 47·08234 | 9747 + 433/483
    | 4347...  |
      ----
       36·12..
       3381..
       ------
        2·313.
        1932.
        ------
         38·14
         3381
         -----
          433
```

oder:

```
13ØØ | 784165 | 603 + 265/1300
     | 78..00 |
       ----
        4·1..
        39..
        -----
         265
```

Beweis. Die Zahlen, welche nach und nach von dem Dividend abgezogen worden sind, machen zusammen das Product der gefundenen Zahl in den Divisor aus (§. 82.). Nun ist nach der Vorschrift nicht mehr abgezogen worden, als der Dividend beträgt, folglich ist jenes Product nicht größer als der Dividend, also entweder ihm gleich, oder kleiner als dieser. Im erstern Fall bleibt, wie in den beiden ersten Exempeln, kein Rest (§. 40.), und die gefundene Zahl ist genau der gesuchte Quotient (§. 86.).

Im

Im zweyten Fall bleibt am Ende ein Rest (§. 28.), wie im dritten und vierten Exempel, folglich ist im dritten Exempel $4708234 = 9747 \times 483 + 433$ (§. 37.), mithin $\frac{4708234}{483} = 9747 + \frac{433}{483}$ (§. 92.), also bekommt man hier den Quotienten, wenn man zur gefundenen ganzen Zahl 9747 noch den Quotienten $\frac{433}{483}$ addirt, und die Zahl 9747 ist deshalb kleiner als der wahre Quotient (§. 28.). Indessen kann sie nicht um eine ganze Einheit kleiner seyn, als dieser. Denn da man, um die erste Ziffer zu finden, von den ersten höchsten Ziffern des Dividends so viele nehmen soll, bis die Zahl, die sie ausmachen, dem Divisor gleich, oder größer als dieser wird, so muß diese Zahl entweder so viele Ziffern enthalten, als der Divisor, oder eine mehr. Ist der erste Fall vorhanden, wie im 4ten Exempel 78 und 13, so kann diejenige Zahl, die, durch den Divisor 13 multiplicirt, ein Product giebt, welches der 78 gleich, oder zunächst kleiner ist, nur eine einzige Ziffer enthalten, weil $10 \times 13 = 130$, folglich schon eine Ziffer mehr hat als 78. Nun ist diese Zahl, hier 6 nach der Vorschrift, die erste gefundene Ziffer; wollte man also diese nur um 1 vermehren, so wäre das Product aus ihr in den Divisor schon größer als 78, folglich wäre es schon größer als der ganze Dividend (§. 58.). Mithin wäre die erste gefundene Ziffer, um 1 vermehrt, schon größer, als der wahre Quotient (§. 98.). Muß man dagegen von den ersten Ziffern des Dividends eine mehr nehmen, als der Divisor hat, wenn ihre Zahl dem Divisor gleich, oder größer als dieser werden soll, wie im 3ten Exempel 4708 und 483, so kann diejenige Zahl, die, durch den Divisor multiplicirt, ein Product giebt, das zunächst kleiner als 4708, oder eben so groß ist, gleichfalls nur eine einzige Ziffer seyn; denn da hier $483 > 470$ nach der Voraussetzung, so

setze man, der Divisor wäre blos um 1 größer als 470, d. i. 483 = 470 + 1, so wäre 10 × 483 = 4700 + 10, also 10 × 483 schon größer als 4700 + 9, d. i. größer als 4709. Also kann hier eben so, wie im vorigen Falle, die erste gefundene Ziffer nicht mehr um 1 kleiner seyn, als die erste Ziffer des wahren Quotienten. Eben so wenig findet dieses bey der zweyten gefundenen Ziffer statt. Denn ist sie kleiner als 9, so hätte man, wenn sie um 1 kleiner wäre, als die wahre zweyte Ziffer, nicht vorschriftsmäßig dividirt, sondern die nächstgrößere Ziffer wirklich nehmen sollen. Ist sie aber 9, so kann sie gleichfalls nicht mehr um 1 kleiner seyn, als die wahre; denn, wollte man, statt ihrer, 10 setzen, so würde dadurch die erste gefundene Ziffer um 1 vermehrt werden, welches nach dem oben Erwiesenen nicht möglich ist. Auf eben diese Art ist klar, daß auch nicht die dritte, vierte, und überhaupt keine der gefundenen Ziffern mehr um 1 kleiner seyn kann, als die wahren. Also ist in dem Falle, da ein Rest bleibt, die gefundene ganze Zahl zwar nicht genau der verlangte Quotient, aber sie ist nicht mehr um 1 kleiner als dieser, mithin ist der Quotient aus dem Rest durch den Divisor, der noch hinzukommen muß, kleiner als 1, also der Rest weder dem Divisor gleich, noch größer (§. 102.), folglich kleiner als der Divisor.

§. 107.

Zus. Um die Probe zu machen, multiplicirt man die gefundene Zahl mit dem Divisor, und addirt den Rest zum Product, wo denn der Dividend herauskommt, wenn richtig verfahren worden ist (§. 86.).

§. 108.

§. 108.

Anm. Wenn der Divisor aus mehrern Ziffern besteht, so kann man sich zur Erleichterung des Dividirens vorher ein Einmaleins von ihm verfertigen, indem man ihn durch die 9 ersten Zahlen multiplicirt. Z. B. wenn der Divisor 483 ist, so ist

2mal	483 =	966
3	— — —	1449
4	— — —	1932
5	— — —	2415
6	— — —	2898
7	— — —	3381
8	— — —	3864
9	— — —	4347

Käme nun etwa beym Dividiren der Fall vor, daß die im Dividend befindlichen Ziffern, von welchen ein Theil des Quotienten gefunden werden sollte, 2415 bis 2897 betrügen, so wäre die in den Quotienten zu nehmende Ziffer 5, und man müßte die Zahl 2415 von jenen Ziffern des Dividends abziehen. Wären sie 3864 bis 4346, so müßte man 8 in den Quotienten nehmen, und 3864 abziehen. Die Nepperischen Stäbchen (lamellae Nepperianae), bey welchen die einzelnen Producte aus dem Einmaleins so aufgetragen sind, daß diejenigen, welche aus 2 Ziffern bestehen, abgetheilt erscheinen, gewähren sowohl beym Multipliciren als Dividiren eine noch größere Bequemlichkeit.

§. 109.

Anm. Die vorhin beschriebene Art nennt man unter sich dividiren; man hat aber auch eine Art über sich zu dividiren, bey welcher man die Ziffern des Divisors unter die des Dividends schreibt, die Producte aus den einzelnen Ziffern sogleich in Ge-

danken von den Dividendsziffern abzieht, und die Reste über dieselben schreibt. Z. B.

1·
3(4
2·7·0·
8·3 8(3
3·6 5 9 5
1·8 1 1 1(3
4 7 0 8 2 3 4 | 9 7 4 7
4 8 3 3 3 3
4 8 8 8
4 4

Diese Art hat aber das Unbequeme, daß man sich bey ihr leicht verrechnet, und alsdenn die Rechnung nicht füglich wieder durchsehen kann; wenn aber der Divisor nur aus einer Ziffer besteht, so kann sie mit Nutzen gebraucht werden.

§. 110.

Anm. Da der bey der Division bleibende Rest allemal kleiner als der Divisor ist, so muß man es blos anzeigen, daß er noch besonders durch den Divisor zu theilen sey. Die Art, wie die Größe dieses Quotienten auszumitteln ist, wird unten bey den Brüchen gezeigt werden.

§. 111.

Lehrs. Wenn man bey zwey gleichen Quotienten ganzer Zahlen den Dividend des ersten durch den Dividend des andern, und den Divisor des ersten durch den Divisor des andern dividirt, so sind die

die Quotienten gleich, d. i. wenn $\frac{r}{n} = \frac{u}{v}$, so ist auch $\frac{r}{u} = \frac{n}{v}$. Z. B. $\frac{12}{3} = \frac{24}{6}$, so ist auch $\frac{24}{12} = \frac{6}{3} = 2$.

Beweis. Denn $u = \frac{r}{n} \times v$ (§. 87.) $= \frac{r \times v}{n}$ (§. 94.), folglich $r \times v = u \times n$ (§. 87.) $= n \times u$ (§. 79.), folglich $\frac{r \times v}{u} = n$ (§. 87.), folglich $\frac{r}{u} \times v = n$ (§. 94.), also $\frac{r}{u} = \frac{n}{v}$ (§. 87.).

§. 112.

Erklär. Wenn ein Quotient ganzer Zahlen keinem gleich ist, der kleinere ganze Zahlen zum Dividend und Divisor hat; so sagt man, er sey durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt. Z. B. der Quotient $\frac{5}{2}$ ist durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt, nicht aber der ihm gleiche $\frac{10}{4}$.

§. 113.

Zus. Wenn ein Quotient ganzer Zahlen nicht bereits selbst durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt ist, so giebt es allemal einen Quotienten, der ihm gleich und durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt ist. Denn in diesem Fall ist er noch einem Quotienten von kleinern ganzen Zahlen gleich. Gesetzt, dieser wäre auch noch nicht durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt, so wäre er wieder einem Quotienten von noch kleinern ganzen Zahlen gleich. Allein da die ganzen Zahlen nicht ohne Ende kleiner werden, sondern höchstens nur bis auf 1 abnehmen können, so muß es endlich einen

Quotienten geben, der sich nicht weiter durch kleinere Zahlen ausdrucken läßt. Z. B. $\frac{12}{8}$ wird durch die kleinern Zahlen $\frac{6}{4}$, und dieser durch die noch kleinern $\frac{3}{2}$ ausgedruckt.

§. 114.

Lehrs. Wenn von zwey gleichen Quotienten $\frac{r}{n}$ und $\frac{u}{v}$ der eine $\frac{u}{v}$ durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt ist, so sind die Quotienten $\frac{r}{u}$ und $\frac{n}{v}$ einerley ganze Zahl. Z. B. $\frac{12}{8}$ und $\frac{3}{2}$, wo $\frac{12}{3}$ und $\frac{8}{2}$ beiderseits $= 4$ sind.

Beweis. Weil $\frac{r}{n} = \frac{u}{v}$ nach der Voraussetzung, so ist $\frac{r}{u} = \frac{n}{v}$ (§. 111.), und da $\frac{u}{v}$ nach d. Voraussf. durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt ist, so ist $r > u$, und $n > v$ (§. 112.), folglich ist $\frac{r}{u}$ entweder eine ganze Zahl p, oder $p + \frac{w}{u}$, und $\frac{n}{v}$ entweder eine ganze Zahl q, oder $q + \frac{m}{v}$, wo $w < u$ und $m < v$ (§. 106.). Nun setze man, es wäre $\frac{r}{u} = p + \frac{w}{u}$, so wäre $\frac{r}{u}$ keine ganze Zahl, also auch $\frac{u}{v}$ nicht, folglich wäre $\frac{n}{v} = q + \frac{m}{v}$, mithin $p + \frac{w}{u} = q + \frac{m}{v}$,

also

also $\frac{w}{u} = \frac{m}{v}$, folglich $\frac{w}{m} = \frac{u}{v}$ (§. 111.), mithin wäre der Quotient $\frac{u}{v}$ nicht durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt (§. 112.), da nun dieses gegen die Voraussetzung ist, so ist $\frac{r}{u}$ eine ganze Zahl, also auch $\frac{n}{v}$ eben dieselbe ganze Zahl.

§. 115. Theilbare Zahlen. Theiler.

Erklär. Wenn eine ganze Zahl sich durch eine andere so dividiren läßt, daß kein Rest bleibt, d. i. so, daß der Quotient auch eine ganze Zahl ist, so sagt man: die erste Zahl ist durch die andere theilbar, und die andere heißt ein Theiler der ersten. Z. B. $\frac{18}{6} = 3$, also ist 18 durch 6 theilbar, oder 6 ist ein Theiler von 18.

§. 116.

Zus. Es ist daher der Theiler n einer ganzen Zahl m ein Maaß von ihr. Denn wenn $\frac{m}{n} = r$, so ist $m = r \times n$ (§. 87.) $= n \times r$ (§. 79.), folglich $m = n + n + n \ldots$ (§. 73.), also n ein Maaß von m (§. 16.). Z. B. 3 ist ein Maaß von 12, weil $12 = 3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$.

§. 117.

Zus. Der größte Theiler einer ganzen Zahl n ist n, d. i. sie selbst. Denn, dividirt man n durch eine größere Zahl, so ist der Quotient kleiner als 1 (§. 102.), also keine ganze Zahl.

§. 118.

Zus. Wenn daher n ein Theiler von m ist, so ist n der größte gemeinschaftliche Theiler von m und n zugleich. Z. B. 6 ist der größte gemeinschaftliche Theiler von 18 und 6, denn n ist der größte Theiler von sich selbst (§. 117.).

§. 119.

Zus. Wenn in einem Product $m \times n$ ganzer Zahlen ein Factor m durch eine ganze Zahl r theilbar ist, so ist auch das Product durch r theilbar. Z. B. 14 ist durch 7 theilbar, also auch 14×9 oder 126 theilbar, es ist nemlich 7 darin 18mal enthalten. Denn $\frac{m \times n}{r} = \frac{m}{r} \times n$ (§. 94.) = einer ganzen Zahl (§. 74.), also ist $m \times n$ durch r theilbar.

§. 120.

Zus. Wenn der Divisor und Rest durch einerley Zahl theilbar sind, so ist auch der Dividend durch sie theilbar. Z. B. wenn man 78 durch 9 dividirt, so ist der Quotient 8 und der Rest 6; nun sind 9 und 6 beide durch 3 theilbar, also auch 78. Es ist nemlich $78 = 8 \cdot 9 + 6$ (§. 106.), folglich $\frac{78}{3} = \frac{8 \cdot 9}{3} + \frac{6}{3}$ (§. 91. 92.). Da nun $\frac{6}{3}$ und $\frac{9}{3}$ ganze Zahlen sind (nach d. Voraussꝛ.), so ist auch $\frac{8 \cdot 9}{3}$ eine ganze Zahl (§. 119.), folglich auch $\frac{78}{3}$ (§. 60.), also 78 durch 3 theilbar.

§. 121.

Zus. Wenn der Dividend und Divisor durch einerley Zahl theilbar sind, so ist auch der Rest durch sie theilbar. Z. B. wenn man 78 durch 9 dividirt,

so

so ist der Quotient 8 und der Rest 6. Nun sind 78 und 9 durch 3 theilbar, also auch 6. Denn es ist wieder, wie vorhin, $78 = 8 \cdot 9 + 6$, folglich $78 - 8 \cdot 9 = 6$ (§. 38.), folglich $\frac{78}{3} - \frac{8 \cdot 9}{3} = 6 \cdot 3$ (§. 91. 93). Da nun $\frac{78}{3}$ und $\frac{9}{3}$ ganze Zahlen sind (nach d. Vorauss.), folglich auch $\frac{8 \cdot 9}{3}$ (§. 119.), so ist $\frac{6}{3}$ eine ganze Zahl (§. 60.), also 6 durch 3 theilbar.

§. 122.

Zus. Wenn eine gegebne Zahl der größte gemeinschaftliche Theiler für den Divisor und Rest ist, so ist sie es auch für den Dividend und Divisor. Z. B. wenn man 78 durch 9 dividirt, so ist der Rest 6. Nun ist 3 der größte gemeinschaftliche Theiler von 9 und 6, also auch von 78 und 9. Denn wenn der Divisor und Rest durch eine Zahl theilbar ist, so ist auch der Dividend durch sie theilbar (§. 120.). Wäre nun aber der Dividend und Divisor noch durch eine größere Zahl theilbar, so wäre auch der Rest durch sie theilbar (§. 121.), folglich wäre die gegebne Zahl nicht der größte gemeinschaftliche Theiler für den Divisor und Rest; da nun dieses gegen die Voraussetzung ist, so ist die gegebne Zahl die größte, durch welche der Dividend und Divisor theilbar ist, d. i. der größte gemeinschaftliche Theiler von ihnen.

§. 123.

Aufgabe. Den größten gemeinschaftlichen Theiler zweyer ganzen Zahlen zu finden.

Auflös. Man dividire die größere Zahl durch die kleinere (§. 106.); bleibt ein Rest, so dividire man durch ihn den Divisor. Bleibt wieder ein Rest, so dividire man durch ihn wieder den letztern Divisor, und

und fahre auf diese Art so lange fort, bis kein Rest mehr bleibt. Der letzte Divisor ist der verlangte größte gemeinschaftliche Theiler der gegebnen beiden Zahlen. Z. B. es seyen die beiden Zahlen 10051 und 966 gegeben, so verfährt man also:

966	10051	10
	966	
391	966	2
	782	
184	391	2
	368	
23	184	8
	184	
	0	

Also ist 23 der größte gemeinschaftliche Theiler von 10051 und 966.

Beweis. Weil 23 ein Theiler von 184 ist (§. 115.), so ist 23 der größte gemeinschaftliche Theiler von 184 und 23 (§. 118.), folglich auch von 391 und 184 (§. 122.), folglich auch von 966 und 391 (§. 122.), folglich auch von 10051 und 966 (§. 122.).

§. 124.

Lehrs. Wenn man bey einem Quotienten ganzer Zahlen den Dividend und Divisor durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt, so geben die gefundenen Zahlen einen Quotienten, der nicht nur dem gegebenen gleich, sondern auch schon durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt ist. Z. B. von 42 und 56 ist der größte gemeinschaftliche Theiler 14. Nun ist $\frac{42}{14} = 3$ und $\frac{56}{14} = 4$; also $\frac{42}{56} = \frac{3}{4}$, und der Quotient $\frac{3}{4}$ ist schon durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt.

Be=

Beweis. Es ist $\frac{42}{56} = \frac{3}{4}$ (§. 96.). Nun setze man, der Quotient wäre noch nicht durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt, so gäbe es einen ihm gleichen $\frac{m}{n}$, der durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt wäre (§. 113.), folglich wäre $\frac{42}{56} = \frac{m}{n}$, mithin $\frac{42}{m}$ und $\frac{56}{n}$ einerley ganze Zahl (§. 114.). Man nenne also dieselbe r, so wäre $\frac{42}{m} = r$ und $\frac{56}{n} = r$, folglich $\frac{42}{r} = m$ und $\frac{56}{r} = n$ (§. 103.), folglich r ein gemeinschaftlicher Theiler von 42 und 56 (§. 115.). Nun aber ist $m < 3$ (nach der Vorauss.), folglich $\frac{42}{r} < 3$ (§. 19.), aber $\frac{42}{14} = 3$ (nach d. Vorauss.), also $\frac{42}{r} < \frac{42}{14}$ (§. 19.), mithin $r > 14$ (§. 99.), also wäre 14 noch nicht der größte gemeinschaftliche Theiler von 42 und 56. Da nun dieses der Annahme widerspricht, so ist $\frac{3}{4}$ schon durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt.

§. 125.

Zus. Wenn daher der größte gemeinschaftliche Theiler zweyer Zahlen 1 ist, so ist ihr Quotient schon durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt (§. 90.). Z. B. bey $\frac{3}{4}$ ist der größte gemeinschaftliche Theiler = 1, also kann man diesen Quotienten durch keine kleinere Zahlen ausdrucken.

§. 126.

Zus. Wenn umgekehrt ein Quotient ganzer Zahlen $\frac{r}{n}$ schon durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt ist, so ist ihr größter gemeinschaftlicher Theiler 1; denn, gäbe es noch einen größern, u, so wäre $\frac{r}{u} < \frac{r}{1}$ und $\frac{n}{u} < \frac{n}{1}$ (§. 99.), folglich $\frac{r}{u} < r$, und $\frac{n}{u} < n$ (§. 90.), folglich wäre der Quotient $\frac{r}{n}$ noch einem Quotienten von kleinern Zahlen gleich (§. 96.), also noch nicht durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt (§. 112.). Z. B. der Quotient sey $\frac{5}{6}$, gäbe es also einen größern gemeinen Theiler für die Zahlen, als 1, z. B. 2, so wäre $\frac{5}{2} < \frac{5}{1}$, und $\frac{6}{2} < \frac{6}{1}$, folglich $\frac{5}{2} < 5$ und $\frac{6}{2} < 6$, folglich wäre der Quotient $\frac{5}{6}$ noch einem Quotienten von kleinern Zahlen gleich, und doch ist angenommen, daß der Quotient durch die kleinsten Zahlen schon ausgedruckt sey.

§. 127. Gerade, ungerade Zahlen.

Erklär. Eine ganze Zahl, die durch 2 theilbar ist, heißt eine gerade Zahl (numerus par), eine solche, die nicht durch 2 theilbar ist, eine ungerade (impar).

§. 128.

Zus. Wenn man daher unter n eine jede beliebige ganze Zahl versteht, so ist jede gerade Zahl $= 2n$, und jede ungerade $= 2n + 1$ oder $= 2n - 1$, denn $\frac{2n}{2} = n$ (§. 88.) und $\frac{2n + 1}{2} = n + \frac{1}{2}$ (§. 92.),

(§. 92.), imgleichen $\frac{2n-1}{2} = n - \frac{1}{2}$ (§. 93.). Z. B. n = 5, so ist 2.5 = 10 eine gerade Zahl; hingegen 2.5 + 1 = 11 oder 2.5 — 1 = 9, beidemal eine ungerade Zahl.

§. 129.

Zus. Nimmt man also für n nach und nach alle ganze Zahlen, 1, 2, 3, u. s. w., so bekommt man alle gerade und ungerade Zahlen in ihrer Folge, nämlich die geraden sind 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 rc.; die ungeraden hingegen 1, 3, 5, 7, 9 rc.

§. 130.

Zus. Also ist die nte gerade Zahl = 2n, die nte ungerade aber = 2n — 1 (§. 129.). Z. B. die 3te gerade Zahl ist 6, also 2mal 3 = 6, und die 3te ungerade 5, = 2.3 — 1 = 6 — 1.

§. 131.

Zus. Eine gerade Zahl zu einer geraden addirt, oder von ihr subtrahirt, giebt eine gerade. Denn (2n + 2m) = 2(n + m), und 2n — 2m = 2(n — m) (§. 75. 76.). Z. B. 4 + 6 = 10, oder 12 — 8 = 4.

§. 132.

Zus. Eine ungerade Zahl zu einer ungeraden addirt, oder von ihr subtrahirt, giebt eine gerade; denn (2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2 (§. 31.) = (2n + m + 1) (§. 75.), und (2n + 1) — (2m + 1) = 2n — 2m + 1 — 1 (§. 41.) = 2n — 2m (§. 40.) = 2(n — m) (§. 76.). Z. B. 5 + 7 = 12, oder 7 — 5 = 2.

§. 133.

Zus. Eine gerade Zahl zu einer ungeraden addirt, oder eine von der andern subtrahirt, giebt eine ungerade. Denn $2n + (2m + 1) = 2(n + m) + 1$ und $2n - (2m + 1) = 2(n - m) - 1$, imgleichen $(2m + 1) - 2n = 2(m - n) + 1$ (§. 41. 76.). Z. B. $2 + 3 = 5$, oder $5 - 2 = 3$.

§. 134.

Zus. Eine gerade oder ungerade Zahl durch eine gerade multiplicirt, giebt eine gerade. Denn $2n \times 2m = 2.2nm$ (§. 78.), und $(2n + 1) \times 2m = 2n \times 2m + 2m$ (§. 75.) $= 2.2nm + 2m$ (§. 78.) $= 2(2nm + m)$ (§. 75.). Z. B. 4mal 2 = 8, oder 5mal 2 = 10.

§. 135.

Zus. Eine ungerade Zahl, durch eine ungerade multiplicirt, giebt eine ungerade. Denn $(2n + 1) \times (2m + 1) = (2n + 1) \times 2m + (2n + 1) \times 1$ (§. 77.). Da nun $(2n + 1) \times 2m$ gerade (§. 134.), und $(2n + 1) \times 1 = 2n + 1$ ungerade ist (per def.), so sind beide zusammen ungerade (§. 133.). Z. B. 3mal 5 = 15.

§. 136.

Zus. Wenn eine gerade Zahl, durch eine gerade dividirt, eine ganze Zahl giebt, so kann diese gerade oder ungerade seyn. Denn man mag die gerade oder die ungerade durch den geraden Divisor multipliciren, so ist der Dividend, den das Product giebt (§. 87.), in beiden Fällen gerade (§. 134.). Z. B. 6 in 12 giebt 2 im Quotienten, welcher gerade ist, hingegen 4 in 12 giebt den ungeraden Quotienten 3.

§. 137.

Zus. Wenn eine gerade Zahl, durch eine ungerade dividirt, eine ganze Zahl giebt, so ist diese gerade. Denn, wäre sie ungerade, so wäre das Product aus ihr in den Divisor ungerade (§. 135.), also auch der Dividend ungerade (§. 87.).

§. 138.

Zus. Eine ungerade Zahl, durch eine gerade dividirt, giebt niemals eine ganze Zahl. Denn man nehme sie gerade oder ungerade an, so wäre das Product aus ihr in den Divisor, folglich der Dividend, in beiden Fällen gerade (§. 134.).

§. 139.

Zus. Wenn eine ungerade Zahl, durch eine ungerade dividirt, eine ganze Zahl giebt, so ist diese ungerade. Denn, wäre sie gerade, so wäre das Product aus ihr in den Divisor, d. i. der Dividend, gerade (§. 134.).

§. 140. Zusammengesetzte und Prim-Zahlen.

Erklär. Eine ganze Zahl, die außer ihr selbst und der Zahl 1 keinen andern Theiler hat, heißt eine einfache, oder eine Primzahl (numerus primus). Eine solche aber, die außer ihr selbst und der Zahl 1 noch einen oder mehrere Theiler hat, heißt eine zusammengesetzte (compositus).

§. 141.

Zus. Die Primzahlen sind 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 u. s. w. Die zusammengesetzten: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24 u. s. w.

§. 142.

Zus. Zwey verschiedene Primzahlen haben keinen andern gemeinschaftlichen Theiler als die Zahl 1. Denn jede von ihnen hat zwar noch sich selbst, aber nicht die andere zum Theiler (per def.).

§. 143.

Zus. Also ist ein Quotient zweyer Primzahlen, z. B. $\frac{7}{5}$, schon durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt (§. 125.).

§. 144. Kennzeichen der zusammengesetzten und Prim-Zahlen.

Anm. Bey einigen Zahlen hat man zwar gewisse Kennzeichen, aus welchen man sogleich einsehen kann, daß sie zusammengesetzt sind, und einen gewissen Theiler haben. Z. B. wenn die Ziffer der Einer eine gerade Zahl ist, so ist die ganze Zahl durch 2 theilbar. Wenn die Summe aller Ziffern, jede als ein simpler Einer betrachtet, eine Zahl giebt, welche durch 3 theilbar ist, so ist auch die Zahl selbst, nach dem Decadischen Gesetz ausgesprochen, durch 3 theilbar. Z. B. 5742 ist durch 3 theilbar, weil $5 + 7 + 4 + 2 = 18$ durch 3 theilbar ist. Sind die beiden letzten Ziffern rechter Hand durch 4 theilbar, so ist auch die ganze Zahl theilbar. Ist am Ende zur Rechten eine 0 oder 5, so ist die Zahl durch 5 theilbar. Ist sie durch 2 und 3 theilbar, so ist sie auch durch 6 theilbar, wie z. B. die 5742. Sind die 3 letztern Ziffern zur Rechten durch 8 theilbar, so ist auch die Zahl selbst dadurch theilbar. Ist die Summe der Ziffern, als lauter Einer betrachtet, durch 9 theilbar, so ist auch die Zahl durch 9 theilbar, z. B. 5742. Bey den Zahlen aber, wo die Ziffer der Einer 1, 3, 7, 9 ist, hat man noch kein allgemeines

meines Criterium erfinden können, aus welchem man bequem beurtheilen könnte, ob dieselben Primzahlen oder zusammengesetzte sind.

§. 145.

Lehrs. Jede zusammengesetzte endliche Zahl m hat eine Primzahl zum Theiler.

Beweis. Weil sie einen Theiler n hat (§. 140.), so ist $m = n + n + \ldots$ (§. 116.). Man setze also, n sey zusammengesetzt, so hat n wieder einen Theiler r, und es ist wieder $n = r + r + \ldots$ Wäre r wieder zusammengesetzt, so hätte r wieder einen Theiler u, und es wäre $r = u + u + \ldots$, folglich $m = u + u + \ldots + u + u + \ldots + u + u + \ldots$ Gesetzt also, m hätte keine Primzahl zum Theiler, so hätte jeder neue Theiler ohne Ende fort immer wieder einen Theiler, folglich wäre m eine Summe von unendlich vielen ganzen Zahlen, mithin wäre sie unendlich groß (§. 23.). Da nun dieses wider die Annahme ist, so muß sie eine Primzahl zum Theiler haben. Z. B. 18 hat einen Theiler 9, so ist $18 = 9 + 9$; da nun 9 wieder zusammengesetzt ist, so hat es einen Theiler 3, und 9 ist $= 3 + 3 + 3$, also $18 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$, wo also 3 die Primzahl ist, welche der Theiler von 18 ist.

§. 146.

Lehrs. Jede zusammengesetzte endliche Zahl m ist ein Product aus lauter Primzahlen.

Beweis. Da sie eine Primzahl n zum Theiler hat (§. 145.), so ist $m = n \times r$ (§. 116.). Nun ist r entweder gleichfalls schon eine Primzahl, oder zusammengesetzt (§. 140.). Im erstern Fall ist der Satz richtig; im zweyten hat r wieder eine Primzahl u zum Theiler (§. 145.), und es ist $r = u \times v$ (§. 116.), folglich $m = n \times u \times v$. Ist nun v auch

auch eine Primzahl, so ist der Satz wieder richtig. Ist aber v zusammengesetzt, so hat v wieder eine Primzahl w zum Theiler, und es wird $m = n \times u \times w \times y$. Auf diese Art wird das Product m aus immer mehrern Primzahlen als Factoren zusammengesetzt, so lange noch einer von allen Factoren keine Primzahl ist. Da nun die ganze Zahl m endlich ist, folglich nicht ein Product aus unendlich vielen ganzen Zahlen seyn kann, so muß sie ein Product seyn, dessen Factoren sich in lauter Primzahlen auflösen lassen. Z. B. 18 ist $= 3 . 6$, und 6 wieder $= 2 . 3$, also $18 = 3 . 2 . 3$, lauter Primzahlen.

§. 147.

Lehrs. Ein Product aus lauter Primzahlen kann nicht einem Producte ganzer Zahlen gleich seyn, das auch nur eine einzige von jenen verschiedene Primzahl zum Factor hat, z. B. es kann nicht $7 \times 13 = 3 \times n$, oder $7 \times 13 \times 19 = 3 \times n$ seyn, u. s. w. die ganze Zahl n sey, welche man wolle.

Beweis. Denn wenn $7 \times 13 = 3 \times n$, so wäre $\frac{7 \times 13}{n} = 3$ (§. 87.), folglich $\frac{7}{n} \times 13 = 3$ (§. 94.), also $\frac{7}{n} = \frac{3}{13}$ (§. 87.). Nun ist der Quotient $\frac{3}{13}$ durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt (§. 143.), folglich wäre $\frac{7}{3}$ eine ganze Zahl (§. 114.), mithin 7 durch 3 theilbar (§. 115.), also 7 keine Primzahl (§. 140.). Da nun dieses wider die Annahme ist, so kann nicht $7 \times 13 = 3 \times n$ seyn.

Man setze ferner, es wäre $7 \times 13 \times 19 = 3 \times n$, so ist $(7 \times 13) \times 19 = 3n$ (§. 78.), folglich, wie vorhin $\frac{7 \times 13}{n} = \frac{3}{19}$, mit $\frac{7 \times 13}{3}$ eine ganze Zahl r

(§. 114.),

(§. 114.), folglich $7 \times 13 = 3 \times r$ (§. 87.). Dieses aber ist vermöge des vorhin erwiesenen unmöglich. Also kann auch nicht $7 \times 13 \times 19 = 3 \times n$ seyn. Und so ist der Satz allgemein klar, das Product mag aus so viel Primzahlen zusammengesetzt seyn, als man wolle.

§. 148.

Zus. Da nun jede zusammengesetzte Zahl ein Product aus lauter Primzahlen ist (§. 146.), so hat jede zusammengesetzte Zahl ihre bestimmten Primzahlen zu Factoren, so daß, wenn man nur eine einzige von ihnen abändert, so fort eine andere zusammengesetzte Zahl entstehet. Z. B. 21 hat keine andere Primzahlen, als 1, 3, 7; die Zahl 12 keine andere, als 2, 2, 3.

§. 149.

Erklär. Wenn zwey oder mehrere ganze Zahlen, außer der Zahl 1, keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so heißen sie Primzahlen unter sich (numeri primi inter se); haben sie aber einen gemeinschaftlichen Theiler, der nicht 1 ist, so heißen sie zusammengesetzte unter sich. Z. B. 3 und 5, 4 und 9 sind Primzahlen unter sich, aber 8 und 12, 9 und 15 sind zusammengesetzte unter sich.

§. 150.

Zus. Also sind alle Primzahlen auch Primzahlen unter sich. Z. B. 5 und 7, 11, 13, 19 (§. 142.).

§. 151.

Zus. Zahlen, von denen jede eine zusammengesetzte ist, können doch Primzahlen unter sich seyn, z. B. 4 und 9; 8 und 15.

§. 152.

Zus. Wenn der Dividend und Divisor Primzahlen unter sich sind, so ist der Quotient schon durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt; und umgekehrt, wenn der Quotient zweyer ganzen Zahlen schon durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt ist, so sind diese Primzahlen unter sich (§. 125. 126.).

2. Von den Brüchen.

A. Von den Brüchen überhaupt.

§. 153. Bruch, Zähler, Nenner, Stammbruch; ächter, unächter Bruch.

Erklär. Wenn eine ganze Zahl n anzeigt, der wievielste Theil des Maaßes oder der Einheit a, und eine andere r, wie vielmal dieser Theil zur Erzeugung einer Größe b genommen werden muß; so heißen diese beiden Zahlen, als eine einzige betrachtet, eine gebrochene Zahl, oder ein Bruch (numerus fractus s. fractio). Z. B. wenn ich den 3ten Theil eines Thalers 2mal nehme, um den Werth von zwey Dritteln zu erhalten, so ist hier $n = 3$; $a = 1$ Thaler; $r = 2$ und $b =$ zwey Drittel eines Thalers, und diese Größe wird in Rücksicht des ganzen Thalers ein Bruch desselben genannt. Die Zahl n, welche anzeigt, den wievielsten Theil des Maaßes oder der Einheit a man nehmen soll, heißt der Nenner (denominator), und die Zahl r, welche anzeigt, wie vielmal man den nten Theil der Einheit a nehmen soll, heißt der Zähler des Bruchs (numerator). Man bezeichnet die Brüche eben so, wie es §. 86. von den Quotienten mit ist bemerkt worden; nämlich man setzt den Nenner unter den Zähler, und zieht zwi-

zwischen beiden einen Strich, z. B. $\frac{r}{n}$ a oder $\frac{2}{3}$ Thaler. Ein Bruch, dessen Zähler 1 ist, wird ein Stammbruch genannt, z. B. $\frac{1}{3}$ Thaler. Ist der Zähler kleiner als der Nenner, so heißt der Bruch ein ächter (fractio vera). Ist aber der Zähler dem Nenner gleich, oder größer als dieser, so heißt der Bruch ein unächter, oder ein Bastardbruch (fract. spuria).

§. 154.

Zus. Also heißt jeder Bruch $\frac{r}{n}$ so viel, als der nte Theil von 1, r mal genommen, oder $\frac{1}{n} \times r$ (§. 73. 104.), z. B. $\frac{2}{3}$ heißt der 3te Theil von 1, 2mal genommen, oder $\frac{1}{3} \times 2$.

§. 155.

Zus. Es entsteht deshalb jeder Bruch aus der Zahl 1, wenn man 1 durch den Zähler multiplicirt und das Product durch den Nenner dividirt, d. i. $\frac{r}{n} = \frac{1 \times r}{n}$ (§. 94.).

§. 156.

Zus. Da der Nenner jede ganze Zahl, die größer als 1 ist, seyn kann, so folgen die Stammbrüche also:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ u. s. w.

und da der Zähler gleichfalls jede ganze Zahl seyn kann, so läßt sich die Erzeugung aller nur möglichen Brüche in folgender Ordnung vorstellen:

$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$ u. s. f. ohne Ende.
$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}$ — — —
$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}$ — — —

§. 157.

Lehrs. Jeder Bruch ist ein Quotient, welcher herauskommt, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt.

Beweis. Nach §. 86. wird unser r durch n dividirt, wenn man eine Größe findet, welche, durch n multiplicirt, die Größe r giebt; wenn man nun $\frac{r}{n}$ durch n multiplicirt, so erhält man $\frac{r}{n} \times n = r$ (§. 88.), z. B. wenn man 2 Thaler durch 3 dividiren soll, so giebt der 3te Theil davon keinen ganzen Thaler, also muß man die ganzen Thaler und kleinern Stücke zerbrechen, um eine solche Anzahl derselben zu erhalten, daß man das Drittel davon in solchen Theilen erhalten kann. Am zweckmäßigsten wird es nun seyn, wenn man die ganze Einheit des Thalers in so viel Theile zerstückt, als der Divisor Einheiten hat, hier also in 3; man erhält also statt 2 ganzer Thaler 6 Drittel Thaler, und hierein mit 3 dividirt, giebt 2 Drittel Thaler = $\frac{2}{3}$ Thaler. Es lassen sich deshalb alle die Sätze, welche oben (§. 87. u. s. f.) von Divisor, Dividend und Quotient vorgekommen sind, auch auf Nenner, Zähler und Bruch anwenden.

§. 158.

Zus. Der Bruch $\frac{r}{n}$ ist eben so viel als der nte Theil von r, z. B. $\frac{2}{3}$ ist der 3te Theil von der Zahl 2; oder: 16 Gr. ist der 3te Theil von 48 Gr., d. i. von 2 Thaler (§. 104.).

§. 159.

Zus. Ein ächter Bruch ist kleiner als 1, ein unächter aber = 1, wenn Zähler und Nenner gleich sind, und größer als 1, wenn der Zähler größer ist als der Nenner (§. 102. 103.). Z. B. $\frac{2}{3}$ Thaler ist = 16 Gr., also kleiner als 1 Thaler; $\frac{3}{3}$ ist = 24 Gr. = 1 Thaler, und $\frac{4}{3}$ = 32 Gr., größer als 1 Thaler.

§. 160.

Zus. Wenn bey der Division ganzer Zahlen ein Rest bleibt, so bedeutet dieser einen ächten Bruch, der den Rest zum Zähler und den Divisor zum Nenner hat (§. 106.). Z. B. wenn 26 durch 3 dividirt werden soll, so ist der Quotient 8 ganze Einheiten, und von der 9ten noch 2 Drittel derselben = $8\frac{2}{3}$.

§. 161.

Zus. Wenn man einen Bruch durch seinen Nenner multiplicirt, so bekommt man den Zähler; d. i. $\frac{r}{n} \times n = r$ (§. 87.). Z. B. $\frac{2}{3}$ dreymal genommen, giebt 6 Drittel = $\frac{6}{3}$ = 2.

§. 162.

Zus. Jede ganze Zahl r läßt sich in einen Bruch verwandeln, wenn man sie durch eine beliebige ganze Zahl n multiplicirt, und das Product zum Zähler, das n aber zum Nenner annimmt; d. i. $r = \frac{r \times n}{n}$.

Z. B. $3 = \frac{3 \cdot 2}{2} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5}$ u. s. w. (§. 88.). Es hat nämlich die Annahme des n, womit man die Zahl vorhin multiplicirte, den Erfolg

der Multiplication wieder aufgehoben, und den vorigen Werth der Zahl wieder hergestellt.

§. 163.

Zus. Wenn man Zähler und Nenner durch einerley ganze Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt die Größe des Bruchs ungeändert; d. i. $\frac{r}{n} = \frac{r \times m}{n \times m}$, desgleichen $\frac{r : m}{n : m} = \frac{1}{n}$ (§. 95. 96.). Z. B. $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$. Es sind nämlich durch die Multiplication des Zählers der Theile so viel mehrere geworden, als die Multiplicirzahl, wie hier die 4, anzeigt, allein durch die Multiplication des Nenners ist auch jeder Theil eben so vielmal, nemlich hier 4mal kleiner geworden, als er zuvor war, und so bleibt deshalb der Werth des Bruchs ungeändert; blos die Art der Theile, in welchen er dargestellt wird, ist geändert worden. Aehnliche Bewandtniß hat es auch mit der Division. Z. B. $\frac{4}{12} = \frac{4 : 2}{12 : 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, denn durch die Division des Zählers werden die Theile so vielmal weniger, als die Dividirzahl Einheiten hat, aber durch die Division des Nenners wird hinwiederum jeder Theil so vielmal größer, als er zuvor war.

§. 164.

Zus. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl multiplicirt, wenn man den Zähler durch sie multiplicirt, d. i. $\frac{r}{n} \times m = \frac{r \times m}{n}$ (§. 94.), z. B. $\frac{2}{3}$ wird 4mal größer, wenn man setzt: $\frac{8}{3}$; die Theile bleiben von der nämlichen Größe, und werden ihrer 4mal mehr genommen.

§. 165.

Zus. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Nenner durch sie multiplicirt, d. i. $\frac{r}{n} : m = \frac{r}{n \times m}$ (§. 97.), z. B. $\frac{2}{3}$ wird 4mal kleiner, wenn man setzt: $\frac{2}{12}$; denn weil itzt die ganze Einheit in 4mal mehr Theile getheilt wird, so ist $\frac{1}{12}$ von ihr 4mal kleiner als $\frac{1}{3}$, und da der Zähler ungeändert bleibt, so erhält man von solchen kleinern Theilen eben nicht mehr als zuvor, folglich hat man einen Werth, der um eben so vielmal geringer ist, als die Multiplicirzahl des Nenners anzeigt.

§. 166.

Zus. Brüche, die gleiche Zähler und gleiche Nenner haben, sind einander gleich, z. B. $\frac{8}{15} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$ (§. 91.).

§. 167.

Zus. Wenn zwey Brüche gleiche Nenner haben, so ist derjenige, der einen größern Zähler hat, größer als der andere, d. i. wenn $r > m$, so ist $\frac{r}{n} > \frac{m}{n}$ (§. 98.), z. B. $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$, weil von gleichgroßen Theilen der Einheit im erstern Bruche mehrere vorhanden sind, als im letztern.

§. 168.

Zus. Wenn zwey Brüche gleiche Zähler haben, so ist derjenige, der einen größern Nenner hat, kleiner als der andere, d. i. wenn $n > m$, so ist $\frac{r}{n} < \frac{r}{m}$ (§. 99.), z. B. $\frac{5}{9} < \frac{5}{8}$, denn beym erstern hat man

5 Theile, deren auf die ganze Einheit 9 gehen, beym letztern aber ebenfalls 5, wo aber schon 8 dieselbe ganze Einheit ausmachen.

§. 169.

Zus. Wenn ein Bruch einen kleinern Zähler und größern Nenner hat, als ein anderer, so ist er kleiner als dieser, d. i. wenn $r < u$, und $n > m$, so ist $\frac{r}{n} < \frac{u}{m}$ (§. 100.), z. B. $\frac{5}{9} < \frac{7}{8}$, denn man hat beym erstern nicht allein kleinere Theile, als beym letztern, sondern auch deren nicht so viele, als beym letztern.

§. 170.

Zus. Wenn zwey Brüche gleich sind, so hat derjenige, der einen größern Zähler hat, auch einen größern Nenner; und derjenige, der einen größern Nenner hat, auch einen größern Zähler, d. i. wenn $\frac{u}{m} = \frac{r}{n}$, und $u > r$ ist, so ist auch $m > n$; und hinwiederum, wenn $m > n$ ist, so ist auch $u > r$ (§. 101.), z. B. $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$, hier sind beym letztern die Theile nur halb so groß als beym erstern, also müssen deren auch doppelt so viel genommen werden, als beym erstern.

§. 171.

Zus. Weil $r = \frac{r}{1}$ (§. 90.), und jeder Quotient einem Bruche gleich ist, dessen Zähler sein Dividend, und dessen Nenner sein Divisor ist (§. 157.), so kann man auch den Quotienten $r : 1$, und daher jede ganze Zahl r, als einen Bruch $\frac{r}{1}$ ausdrucken;

z. B.

z. B. statt der Zahlen 1, 2, 3 rc. kann man $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$ u. s. w. setzen. Wollte man aber einen solchen Ausdruck, der nichts weiter als die Gestalt eines Bruchs bedeutet, für einen wirklichen Bruch halten, so hätte er gar keinen Sinn, denn $\frac{3}{1}$ als wirklicher Bruch hieße: der einte Theil von 1 dreymal genommen (§. 154.), aber der einte Theil von 1, d. i. 1:1, ist kein Theil von 1, sondern die 1 selbst.

§. 172.

Erklär. Brüche von ungleichen Nennern unter einerley Benennung bringen, heißt: Brüche finden, die ihnen gleich sind, und alle einerley Nenner haben.

§. 173. Reduction der Brüche zu gleicher Benennung.

Aufgabe. Brüche von ungleichen Nennern unter einerley Benennung zu bringen.

Auflös. Man multiplicire den Zähler eines jeden Bruchs durch den Nenner aller übrigen, und alle Nenner durch einander (§. 82.); jedes von den erstern Producten giebt den Zähler, und das Product aller Nenner den gemeinschaftlichen Nenner für die gesuchten Brüche, z. B. wenn $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{7}$ unter einerley Benennung gebracht werden sollen, so ist $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21}$, und $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{12}{21}$. Sollen $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$ unter einerley Benennung gebracht werden, so ist $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{112}{168}$; $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 8}{7 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{96}{168}$, und $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 7}{8 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{105}{168}$.

Beweis. Es ist auf diese Art bey jedem gegebnen Bruche der Zähler und Nenner durch einerley ganze

ganze Zahl, oder durch ein Product ganzer Zahlen multiplicirt worden, und es sind deshalb die neuen Brüche von einerley Nennern den gegebnen gleich (§. 163.).

Da indessen bey diesem Verfahren die Arbeit etwas beschwerlich wird, wenn man viele Brüche unter einerley Benennung bringen soll, so kann man in vielen Fällen kürzer abkommen, wenn man nach folgender Vorschrift verfährt, welche übrigens auf eben den Gründen, wie die vorige, beruht. Man sucht nämlich 1) unter den vorhandenen Nennern den größten heraus. 2) Man untersucht, ob er sich durch jeden andern ohne Rest dividiren läßt. 3) Man multiplicirt den größten Nenner mit demjenigen, durch welchen er sich nicht ohne Rest dividiren läßt. 4) Man nimmt am Ende die Zahl, welche man auf solche Art erhalten hat, zum General-Nenner an, dividirt mit jedem Nenner der vorhandenen Brüche in dieselbe, und mit dem erhaltenen Quotienten multiplicirt man den Zähler und Nenner desjenigen Bruchs, mit dessen Nenner man so eben die Division vorgenommen gehabt hat, so bekommt man Brüche, die sämmtlich zu ihrem Nenner jenen General-Nenner haben. Z. B. die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ sollen unter einerley Benennung gebracht werden, so ist 6 der größte Nenner, und die kleinern, 2 sowohl als 3, lassen sich ohne Rest darin dividiren, aber 4 nicht, man multiplicirt also jene 6 mit dieser 4, so ist 24 der General-Nenner, und man macht alsdenn folgende Anordnung:

	24
12) $\frac{1}{2}$	$\frac{12}{24}$
8) $\frac{2}{3}$	$\frac{16}{24}$
6) $\frac{3}{4}$	$\frac{18}{24}$
4) $\frac{5}{6}$	$\frac{20}{24}$

näm-

nämlich man sagt beym erstern Bruch: 2 in 24 hab ich 12mal, und multiplicirt mit dieser 12 den Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{1}{2}$, so erhält man statt dessen $\frac{12}{24}$, und so geht es auch bey den übrigen.

Es läßt sich zuweilen noch eine kleinere Zahl zum Generalnenner finden; wenn nämlich derjenige Nenner der gegebnen Brüche, welcher nicht im herausgesuchten größten Nenner aufgeht, sich in Factoren zerfällen läßt, so läßt man denjenigen Factor bey dem Multipliciren hinweg, mit welchem sich der größte Nenner, oder ein bereits vorhandenes Product von demselben ohne Rest dividiren läßt. Z. B. im obigen Fall ließ sich 6 nicht mit 4 ohne Rest dividiren; es ist aber $4 = 2 \times 2$, und mit der einen 2 läßt sich 6 dividiren, also multiplicirt man blos mit der andern 2, und erhält zum Generalnenner statt 24 nun 12, welches folgende, der vorigen ähnliche, Anordnung giebt:

	12
6) $\frac{1}{2}$	$\frac{6}{12}$
4) $\frac{2}{3}$	$\frac{8}{12}$
3) $\frac{3}{4}$	$\frac{9}{12}$
2) $\frac{5}{6}$	$\frac{10}{12}$

§. 174. Addiren der Brüche.

Aufgabe. Brüche zu addiren.

Auflös. 1) Wenn sie alle einerley Nenner haben, so addire man ihre Zähler (§. 66.) und behalte für die Summe denselben Nenner, d. i. $\frac{r}{n} + \frac{u}{n} = \frac{r+u}{n}$, oder: $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

2) Ha=

2) Haben sie ungleiche Nenner, so bringe man sie unter einerley Benennung (§. 173.), und verfahre alsdenn wie vorhin, z. B. $\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{14}{21}+\frac{12}{21}$ $=\frac{26}{21}$, oder: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{12+16+18+20}{24}$ $=\frac{66}{24}$; oder nach der kürzern Methode $\frac{6+8+9+10}{12}$ $=\frac{33}{12}=2\frac{9}{12}=2\frac{3}{4}$ (§. 163.).

Beweis. Es ist nämlich $\frac{r}{n}+\frac{u}{n}=r:n+u:n$ (§. 157.) $=r+u:n$ (§. 92.) $=\frac{r+u}{n}$ (§. 157.)

§. 175. Subtrahiren der Brüche.

Aufgabe. Einen kleineren Bruch von einem größern zu subtrahiren.

Auflös. 1) Wenn beide einerley Nenner haben, so subtrahire man den kleinern Zähler vom größern (§. 68.), und behalte für die Differenz denselben Nenner, d. i. $\frac{r}{n}-\frac{u}{n}=\frac{r-u}{n}$, z. B. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ (§. 163.).

2) Haben sie ungleiche Nenner, so bringe man sie unter einerley Benennung (§. 173.), und verfahre alsdenn wie vorhin, z. B. $\frac{2}{3}-\frac{4}{7}=\frac{14}{21}-\frac{12}{21}$ $=\frac{2}{21}$.

Beweis. Denn $\frac{r}{n}-\frac{u}{n}=r:n-u:n$ (§. 157.) $=(r-u):n$ (§. 93.) $=\frac{r-u}{n}$ (§. 157.).

§. 176.

§. 176.

Lehrs. Eine Größe a wird durch einen Bruch $\frac{r}{n}$ multiplicirt: 1) wenn man den nten Theil von ihr r mal nimmt, d. i. $a \times \frac{r}{n} = \frac{r}{n} \cdot a$, z. B. 1 Pfund durch $\frac{2}{3}$ multiplicirt, giebt den 3ten Theil vom Pfunde 2mal, oder $\frac{2}{3}$ Pfund.

2) Wenn man sie durch den Zähler multiplicirt und durch den Nenner dividirt, d. i. $a \times \frac{r}{n} = a \times r : n$, z. B. 1 Pfund durch $\frac{2}{3}$ multipliciren, heißt auch so viel, als 2 Pfund durch 3 dividiren, oder der 3te Theil von 2 Pfund.

Beweis. Es soll das Product aus der Größe a auf eben die Art erzeugt werden, als der Multiplicator $\frac{r}{n}$ aus der Zahl 1 (§. 70.). Nun aber entsteht $\frac{r}{n}$ aus 1, erstlich, wenn man den nten Theil von 1 r mal nimmt (§. 154.), und zweytens, wenn man 1 durch den Zähler r multiplicirt und das Product durch den Nenner n dividirt (§. 155.). Also bekommt man das Product, 1) wenn man den nten Theil von a, r mal nimmt, und 2) wenn man a durch r multiplicirt und das Product durch n dividirt.

§. 177.

Zus. Wenn man also eine Größe a durch einen ächten Bruch, z. B. $\frac{2}{3}$, multiplicirt, so wird sie vermindert; denn $a \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,a$; aber $\frac{2}{3}\,a < 1 \cdot a$ (§. 159.),

(§. 159.), man hat nemlich von allen 3 Theilen, welche das ganze a ausmachen, nicht mehr als zwey.

§. 178.

Lehrs. Eine Größe a wird durch einen Bruch $\frac{r}{n}$ dividirt, wenn man sie durch den umgekehrten Bruch multiplicirt, d. i. $a : \frac{r}{n} = a \times \frac{n}{r}$, z. B. a dividirt durch $\frac{2}{3} = a \times \frac{3}{2}$, oder man soll finden, wie vielmal in 4 Thalern $\frac{2}{3}$ eines Thalers enthalten sind, so muß man 4 Thaler vorher auch zu Dritteln machen, und sie deshalb mit dem Nenner 3 multipliciren; man wird da erhalten 12 Drittel, nun kann man untersuchen, wie vielmal 2 Drittel in diesen 12 enthalten sind, d. i. man erhält $\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Beweis. Man setze $a : \frac{r}{n} = q$, so ist $a = q \times \frac{r}{n}$ (§. 87.) $= q \times r : n$ (§. 176. Nr. 2.), folglich $a \times n = q \times r$ (§. 87.), mithin $a \times n : r = q$ (§. 87.), also $a \times \frac{n}{r} = q$ (§. 176. Nr. 2.) $= a : \frac{r}{n}$.

§. 179.

Zus. Wenn man also eine Größe a durch einen ächten Bruch, z. B. $\frac{2}{3}$, dividirt, so wird sie vergrößert; denn $a : \frac{2}{3} = a \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} a$ (§. 176.), aber $\frac{3}{2} a > 1 . a$ (§. 159.), weil nämlich jeder Bruch, dessen Zähler größer ist als der Nenner, größer als 1 ist, einen solchen Bruch erhält man aber allemal,

wenn

wenn man einen ächten Bruch, wo nämlich der Nenner größer als der Zähler ist, umkehrt.

§. 180. Multipliciren der Brüche.

Aufgabe. Einen Bruch durch einen Bruch zu multipliciren.

Auflös. Man multiplicire Zähler durch Zähler, und Nenner durch Nenner (§. 82.), d. i. $\frac{r}{n} \times \frac{u}{v} = \frac{r \times u}{n \times v}$, z. B. $\frac{4}{7} \times \frac{5}{8} = \frac{20}{56}$.

Beweis. Denn $\frac{r}{n} \times \frac{u}{v} = \frac{r}{n} \times u : v$ (§. 176. Nr. 2.) $= \frac{r \times u}{n} : v$ (§. 164.) $= \frac{r \times u}{n \times v}$ (§. 165.), oder: wenn man $\frac{4}{7}$ mit $\frac{5}{8}$ multipliciren soll, so hat man den 8ten Theil von $\frac{4}{7}$, 5mal zu nehmen. Den 8ten Theil von $\frac{4}{7}$ erhält man, wenn man den Nenner 7 mit 8 multiplicirt (§. 165.), nemlich $\frac{4}{56}$, und das 5fache erhält man, wenn man den Zähler 4 mit 5 multiplicirt (§. 164.), also $\frac{20}{56}$.

§. 181.

Zus. Also ist auch bey Brüchen das Product einerley, man mag den ersten durch den zweyten, oder den zweyten durch den ersten multipliciren. Denn $\frac{r}{n} \times \frac{u}{v} = \frac{r \times u}{n \times v} = \frac{u \times r}{v \times n}$ (§. 79.) $= \frac{u}{v} \times \frac{r}{n}$.

§. 182. Dividiren der Brüche.

Aufgabe. Einen Bruch durch einen Bruch zu dividiren.

Auflös. Man multiplicire ihn durch den umgekehrten Divisor (§. 180.), so hat man den gesuchten Quotienten (§. 178.), d. i. $\frac{r}{n} : \frac{u}{v} = \frac{r}{n} \times \frac{v}{u} = \frac{r \times v}{n \times u}$, z. B. $\frac{4}{7} : \frac{5}{8} = \frac{4}{7} \times \frac{8}{5} = \frac{32}{35}$.

Beweis. Wenn man $\frac{4}{7}$ durch $\frac{5}{8}$ dividiren soll, so hat man zu untersuchen, wie vielmal $\frac{5}{8}$ in $\frac{4}{7}$ enthalten ist; bringt man nun beide Brüche zu gleicher Benennung (§. 173.), so erhält man $\frac{32}{56}$ und $\frac{35}{56}$, und nun ist der letztere in dem erstern so vielmal enthalten, als sein Zähler in jenem Zähler enthalten ist, d. i. man erhält zum Quotienten einen neuen Bruch, dessen Zähler aus dem Zähler des reducirten Dividends, und der Nenner aus dem Zähler des reducirten oder zu gleicher Benennung gebrachten Divisors besteht. Die obige Auflösung schreibt aber eben dieses Verfahren, nur mit einiger Abkürzung, vor.

§. 183.

Zus. Wenn $\frac{r}{n}$ und $\frac{u}{v}$ ganze Zahlen sind, z. B. $\frac{8}{4}$ und $\frac{12}{3}$, so kann man im Quotienten $\frac{r}{n} : \frac{u}{v}$, statt des Divisionszeichens (:), das bey den Brüchen angenommene Zeichen (§. 153.) setzen, und ihn durch $\frac{\frac{r}{n}}{\frac{u}{v}}$ oder

oder $\frac{\frac{8}{4}}{\frac{12}{3}}$ ausdrücken (§. 157.). Da nun die Zeichen der Dinge willkührlich sind, so kann man nach der Analogie dieses allgemein, auch in solchen Fällen thun, wo die Brüche $\frac{r}{n}$ und $\frac{u}{v}$ nicht ganze Zahlen sind, und z. B. dem Quotienten $\frac{5}{8} : \frac{2}{3}$ die Bruchgestalt $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}}$ geben, wofern man nur eingedenk bleibt, daß das Bruchzeichen, das zwischen $\frac{5}{8}$ und $\frac{2}{3}$ gesetzt wird, nichts weiter bedeutet, als $\frac{5}{8}$ soll durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden; indessen pflegt man den Bruch $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ und ähnliche so zu verstehen, daß die Einheit in soviel Theile getheilt wird, als die unterste Zahl, z. B. 4, andeutet, und von diesem Viertel wieder die Hälfte genommen wird, so daß er durch ein halb Viertel = $\frac{1}{8}$ ausgesprochen wird.

§. 184. Reguläre, irreguläre Brüche.

Anmerkung. Dieser willkührlich erweiterte Gebrauch des Bruchzeichens hat Gelegenheit gegeben, daß man die Brüche in reguläre, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, und in irreguläre, deren Zähler und Nenner selbst Brüche sind, einzutheilen pflegt. Allein da ein Bruch durch Wiederholung eines aliquoten Theils des Maaßes, oder der Einheit entstehen soll, folglich sowohl der Nenner als der Zähler eine ganze Zahl seyn muß, so sind die irregulären Brüche eigentlich keine Brüche, sondern bloße Quotienten. Gesetzt z. B. der Ausdruck $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}}$ sollte einen

Bruch bedeuten, so hieße derselbe so viel, als der 2drittelste Theil von 1, 5mal genommen. Allein dieser Ausdruck ist so uneigentlich, daß man ihn gar nicht einmal verstehen kann, wofern man ihn nicht erst in seinen eigentlichen Sinn auflöst, und dieser will soviel sagen: $(1 : \frac{2}{3}) \times \frac{5}{8}$, folglich $\frac{3}{2} \times \frac{5}{8}$, also $\frac{5}{8} : \frac{2}{3}$ oder $\frac{15}{16}$. Also sind die sogenannten irregulären Brüche im eigentlichen Sinne nichts weiter, als Quotienten aus dem Dividend durch den Divisor, und lassen sich daher ohne Mühe in reguläre Brüche verwandeln. Gesetzt also auch, man wollte sie noch immer als wirkliche Brüche ansehen, so wäre es doch, da man sie sogleich in reguläre Brüche verwandeln kann, ohne allen Nutzen, eine besondere Lehre aus ihnen zu machen.

Hr. Hofr. Kästner wirft bey Gelegenheit dieser Lehre die Frage auf: Was soll man aber bey einem Bruche denken, der im Ganzen eine Menge von Theilen voraussetzt, die sich durch keine ganze Zahl ausdrucken läßt, z. B. $\frac{32}{5}$, womit man in $\frac{3}{4}$ dividiren sollte? Es ist begreiflich, daß man ein Ganzes mit einem Stücke auszumessen unternehmen kann, welches Stück in dem Ganzen nicht nach einer ganzen Zahl enthalten ist. Man wird sich ohne Schwierigkeit eine Länge von $\frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$ Ellen vorstellen. Wer nun diese Länge mit Ellen ausmessen will, der muß sagen: sie beträgt 6 Ellen und $\frac{2}{5}$ einer Elle, d. i. er theilt sie in eine Menge Theile ein, die $6\frac{2}{5}$ heißt; sie besteht aus 6 ganzen Theilen und $\frac{2}{5}$ eines solchen Theils.

Wenn nun diese Länge von $6\frac{2}{5}$ Ellen für eine Einheit angenommen würde, so könnte man wol fragen: was für ein Stück dieser Einheit sind $\frac{3}{4}$ einer

einer Elle? Die Antwort wäre: man hat $\frac{3}{4}$ einer solchen Größe, deren auf das Ganze $6\frac{2}{5}$ gehen; d. i. man hat einen Bruch, dessen Zähler $\frac{3}{4}$, der Nenner $6\frac{2}{5} = \frac{32}{5}$ ist.

Wenn man den Ducaten zu $2\frac{3}{4}$ Thalern rechnet, was für ein Stück des Ducatens ist der Gulden? Offenbar $\frac{2}{3}$ desjenigen, wovon der Ducaten $2\frac{3}{4}$ hält, also kann man sagen, der Gulden betrage $\frac{\frac{2}{3}}{2\frac{3}{4}}$ des Ducaten $= \frac{8}{33}$ Ducaten.

Das Julianische Jahr besteht aus $365\frac{1}{4}$ Tagen. Eine halbe Woche beträgt $3\frac{1}{2}$ Tag, also sind drittehalb Wochen $= 17\frac{1}{2}$ Tag. Wenn man nun fragt, was für ein Stück des Julianischen Jahrs sind drittehalb Wochen? so heißt es: $\frac{17\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}} = \frac{140}{2922}$ Jahr. Diese Beyspiele werden zeigen, daß man auf solche Brüche bey ganz gemeinen Anwendungen der Arithmetik kommen kann; man muß also ihre Bedeutung verstehen lernen. Indessen wird ihre Bedeutung verständlicher, und sie werden zur fernern Rechnung bequemer, wenn man sie so ausdrückt, daß Zähler und Nenner ganze Zahlen werden. So weit Hr. Kästner.

§. 185. Durch die kleinsten Zahlen ausgedruckte Brüche.

Erklär. Ein Bruch, der keinem gleich ist, dessen Zähler und Nenner kleinere Zahlen sind, heißt durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt. Einen

Bruch zur kleinsten Benennung bringen, heißt, einen Bruch finden, der ihm gleich und durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt ist.

§. 186.

Zus. Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind, ist schon zur kleinsten Benennung gebracht; und wenn umgekehrt ein Bruch von dieser Art ist, so sind Zähler und Nenner Primzahlen unter sich. Denn Brüche sind Quotienten ganzer Zahlen (§. 157.), also sind beide Sätze richtig (§. 152.).

§. 187. Reduction der Brüche zur kleinsten Benennung.

Aufgabe. Einen Bruch zur kleinsten Benennung zu bringen.

Auflös. Man suche den größten gemeinschaftlichen Theiler des Zählers und Nenners (§. 123.), und dividire durch ihn sowohl den Zähler als den Nenner (§. 106.), so geben die Quotienten den verlangten Bruch. Z. B. von $\frac{42}{56}$ ist der größte gemeinschaftliche Theiler 14, und $\frac{42:14}{56:14} = \frac{3}{4} =$ dem verlangten Bruche.

Beweis. Der Bruch ist nämlich ein Quotient aus dem Zähler durch den Nenner (§. 157.), also ist die Auflösung richtig (§. 124.).

§. 188. Vermischte Zahl.

Erklär. Die Summe einer ganzen Zahl und eines ächten Bruchs heißt eine vermischte Zahl (numerus mixtus). Man bezeichnet sie daher als eine einzige Zahl, und läßt das Zeichen + weg. Z. B. die Summe $5 + \frac{3}{4}$ schreibt man $5\frac{3}{4}$.

§. 189.

Zus. Wenn man eine ganze Zahl durch eine kleinere ganze dividirt, so ist der Quotient entweder eine ganze, oder vermischte Zahl (§. 106.), z. B. $\frac{24}{4} = 6$; und $\frac{26}{4} = 6\frac{2}{4} = 6\frac{1}{2}$.

§. 190. Verwandlung vermischter Zahlen in Brüche.

Aufgabe. Eine vermischte Zahl in einen Bruch zu verwandeln.

Auflös. Man multiplicire die ganze Zahl durch den Nenner (§. 82.), und zum Product addire man den Zähler, so ist der Bruch, der die Summe zum Zähler und den gegebnen Nenner zum Nenner hat, der verlangte, z. B. $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$.

Beweis. Denn weil $\frac{5 \times 4}{4} = 5$ (§. 162.), so ist $5 + \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{4} + \frac{3}{4}$ (§. 29.) $= \frac{5 \times 4 + 3}{4}$ (§. 174.) $= \frac{23}{4}$.

§. 191. Rechnungsarten mit vermischten Zahlen.

Zus. Wenn man also vermischte Zahlen addiren, subtrahiren, multipliciren, oder dividiren soll, so darf man sie nur erst in Brüche verwandeln.

§. 192.

Anmerk. Bey der Multiplication und Division verfährt man am kürzesten, wenn man die vermischten Zahlen vorher in Brüche verwandelt. Bey

der Addition und Subtraction derselben aber ist es bequemer, wenn man sowohl die Brüche als die ganzen Zahlen besonders addirt oder subtrahirt. Ist bey der Addition die Summe aller Brüche ein unächter Bruch, so darf man nur den Zähler durch den Nenner dividiren, und die ganze Zahl, die er enthält, zu den ganzen Zahlen addiren, z. B. $8\frac{4}{5}+9\frac{3}{5}=17+\frac{7}{5}=18\frac{2}{5}$, weil $\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$. Soll man aber eine vermischte Zahl, die einen größern Bruch hat, von einer solchen abziehen, die einen kleinern hat, so darf man nur zum Zähler des kleinern den Nenner addiren, und dann den größern abziehen, die ganze Zahl im Minuend aber wieder um 1 vermindern. Z. B.

$$\begin{array}{r} 19\frac{2}{5} \\ 8\frac{4}{5} \\ \hline \text{Differenz}\ 10\frac{3}{5}. \end{array}$$

Denn $19\frac{2}{5}=18+\frac{5}{5}+\frac{2}{5}=18+\frac{7}{5}$.

§. 193.

Lehrs. Wenn der Nenner eines Bruchs eine 1 mit einer oder mehrern Nullen ist, und dergestalt unter den Zähler gesetzt wird, daß die letzte Null unter der Ziffer der Einer im Zähler steht, so bedeutet die Ziffer des Zählers über der ersten Null nach der 1, Zehntheile; die über der zweyten, Hunderttheile; die über der dritten, Tausendtheile u. s. w.; und ist der Bruch ein unächter, so bedeutet die Ziffer des Zählers über der 1, Einer des Bruchs. Z. B.

$$\frac{327}{1000}=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{7}{1000}.$$

Ferner:

$$\frac{285714}{10000}=28+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{4}{10000}.$$

Be=

Beweis. Es ist $\frac{327}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{7}{1000}$ (§. 174.) $= \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{7}{1000}$ (§. 163.). Eben so ist $\frac{285714}{10000} = \frac{280000}{10000} + \frac{5000}{10000} + \frac{700}{10000} + \frac{10}{10000} + \frac{4}{10000}$ (§. 174.) $= 28 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{4}{10000}$ (§. 163.).

§. 194.

Zus. Da nun $1 = \frac{1}{10} \times 10$; $\frac{1}{10} = \frac{1}{100} \times 10$; $\frac{1}{100} = \frac{1}{1000} \times 10$ (§. 164.), so bedeutet, von der Rechten zur Linken gezählt, jede Ziffer des Zählers so, wie bey ganzen Zahlen, das Zehnfache der nächstvorhergehenden. Z. B. im Bruche $\frac{4444}{1000}$ bedeutet die 4 über der 1, zehnmal so viel, als die 4 über der ersten Null; diese zehnmal so viel als die 4 über der zweyten Null u. s. w.

§. 195. Darstellung der Brüche als ganze Zahlen.

Zus. Wenn man daher diejenige Ziffer des Zählers, welche die Einer eines solchen Bruchs vorstellt, durch ein beliebiges Zeichen, z. B. durch ein Comma, von der Ziffer, welche die Zehntheile vorstellt, absondert; so kann man den Nenner ganz weglassen, und einen solchen Bruch als eine ganze Zahl ausdrucken. Z. B. statt $\frac{285714}{10000}$ kann man 28,5741, und statt $\frac{327}{1000} = \frac{0327}{1000}$, kann man 0,327 setzen.

B. Von

B. Von den Decimalbrüchen.

§. 196.

Erklär. Ein Bruch, dessen Nenner eine 1 mit einer oder mehrern Nullen ist, heißt ein zehntheiliger Bruch, oder ein Decimalbruch (fractio decimalis), z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{827}{100}$, $\frac{54}{1000}$ u. s. w. Die Bezeichnung eines Decimalbruchs ist diese: man läßt, vermöge §. 195., den Nenner ganz weg, setzt zwischen die Ziffern des Zählers, welche die Einer und Zehntheile des Bruchs vorstellen, ein Comma, oder einen Punct, und betrachtet auf diese Art den Decimalbruch als eine ganze Zahl. Enthält der Decimalbruch keine Einer, oder keine Zehner, oder keine Hunderter u. s. w., so drückt man jede solche fehlende Ziffer durch eine Null aus. Die Zifferstellen zur Rechten des Comma heißen die Decimalstellen. Z. B. $\frac{3}{10}$ drückt man durch 0,3; $\frac{54}{1000}$ durch 0,054; $\frac{3827}{100}$ durch 38,27 aus u. s. w.

§. 197.

Zus. Nullen, die man einem Decimalbruche zur Rechten oder Linken anhängt, ändern seine Größe nicht. Z. B. 0,3 = 000,3000; denn dieser letztere Ausdruck zeigt an, daß der Bruch nichts weiter als $\frac{3}{10}$ enthalte, folglich 0,3 sey.

§. 198.

Zus. Wenn man einen Decimalbruch durch 10, 100, 1000 rc. multipliciren will, so darf man nur das Comma so viel Stellen nach der Rechten hin fortrücken, als der Multiplicator Nullen enthält.

Z. B.

Z. B. $0,3 \times 10 = 3,0 = 3$, oder $0,3 \times 100 = 30,0 = 30$, oder $38,275 \times 100 = 3827,5$. Denn $0,3 \times 10 = \frac{3}{10} \times 10 = \frac{30}{10}$ (§. 164.) $= 3,0 = 3$, und so auch in Absicht der übrigen.

§. 199.

Zus. Will man hingegen einen Decimalbruch durch 10, 100, 1000 ꝛc. dividiren, so darf man nur das Comma so viel Stellen nach der Linken hin fortrücken, als der Divisor Nullen enthält. Z. B. $\frac{0,3}{10} = 0,03$; oder $\frac{0,3}{1000} = 0,0003$; oder $\frac{38,275}{100} = 0,38275$. Denn $\frac{0,3}{10} = \frac{3}{10} \times 10 = \frac{3}{100}$ (§. 165.) $= 0,03$; und $\frac{0,3}{1000} = \frac{3}{10} : 1000 = \frac{3}{10000} = 0,0003$.

§. 200. Addition und Subtraction der Decimalbrüche.

Aufgabe. Decimalbrüche zu addiren, oder zu subtrahiren.

Auflös. Man setze sie so unter einander, daß die Einer unter Einer, folglich auch die Zehner unter Zehner u. s. w., imgleichen die Zehntheile unter Zehntheile u. s. w. zu stehen kommen, und addire oder subtrahire sie alsdenn eben so wie ganze Zahlen (§. 66. 68.). Z. B.

	423,047
	48,2
	0,75
	0,0032
Summe	472,0002.

oder:

oder:

	95,2004
	86,0563
Differenz	9,1441.

Beweis. Dieser ist völlig so, wie bey der Addition und Subtraction ganzer Zahlen (§. 66. 68.)

§. 201. Multiplication der Decimalbrüche.

Aufgabe. Decimalbrüche durch einander zu multipliciren.

Auflös. Man multiplicire sie so, als ob sie ganze Zahlen wären (§. 82.), und im Product setze man das Comma nach so viel Decimalstellen von der Rechten zur Linken hin, als beide Factoren zusammen enthalten. Z. B.

	3,5 0 1
	6,4 2
	7 0 0 2
	1 4 0 0 4
	2 1 0 0 6
Product	2 2,4 7 6 4 2.

oder:

	0,0 0 3 4
	0,0 6
Product	0,0 0 0 2 0 4.

Be-

Beweis. Es ist $3,501 \times 6,42 = \frac{3501}{1000} \times \frac{642}{100}$ (§. 196.) $= \frac{2247642}{100000}$ (§. 180.) $= 22,47642$ (§. 196.).

§. 202. Division der Decimalbrüche.

Aufgabe. Einen Decimalbruch durch einen andern Decimalbruch zu dividiren.

Auflös. Um den Quotienten wenigstens bis auf eben so viel Decimalstellen zu bekommen, als der Dividend enthält, so hänge man diesem zur Rechten so viel Nullen an, als der Divisor Decimalstellen hat Will man aber den Quotienten auf noch mehrere Decimalstellen haben, so hänge man dem Dividend so viel Nullen an, als man will. Alsdenn dividire man eben so wie bey ganzen Zahlen (§. 106.), und setze im Quotienten das Comma nach so viel Decimalstellen von der Rechten zur Linken, als die des Dividends die des Divisors an der Zahl übertreffen. Auf den Rest, der am Ende übrig bleibt, sieht man hier nicht, sondern wenn derselbe etwa zu beträchtlich ist, so hängt man dem Dividend noch eine Null mehr an, und setzt die Division fort. Z. B. wenn 22,478 durch 6,42 dividirt werden soll, so verfährt man also:

```
6,42 | 22,47800 | 3,501 Quotient.
     | 1926...  |
     ---------
        3218..
        3210..
       --------
          800
          642
        -------
     Rest 158.
```

Soll

Soll 0, 000285 durch 0, 004 dividirt werden, so verfährt man also:

$$4 \mid 285000 \mid 0{,}071250.$$

Beweis. Weil nämlich $3501 \times 642 + 158 = 2247800$ (§. 106.), so ist $3{,}501 \times 6{,}42 + 0{,}00158 = 22{,}47800$ (§. 201.), also ist 3,501 der Quotient (§. 86.).

§. 203. Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche.

Aufgabe. Einen gegebnen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflös. Man hänge dem Zähler zur Rechten so viel Nullen an, als man Decimalstellen haben will, dividire alsdenn den Zähler durch den Nenner (§. 106.), und setze im Quotienten das Comma nach so viel Decimalstellen von der Rechten zur Linken, als man Nullen angehängt hat, so hat man den verlangten Decimalbruch (§. 202.). Z. B.

$$\frac{4}{7} = \frac{400000}{7} = 0{,}57142\ldots$$

§. 204.

Zus. Auf diese Art findet man:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$

$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$

$\frac{1}{4} = 0{,}25$

$\frac{1}{5} = 0{,}2$

$\frac{1}{6} = 0,166666\ldots.$

$\frac{1}{7} = 0,142\,857\;142\,857\;142\,857\ldots.$

$\frac{1}{8} = 0,125$

$\frac{1}{9} = 0,1111111\ldots$

$\frac{1}{10} = 0,1$

$\frac{1}{11} = 0,09\,09\,09\ldots\ldots$ u. s. w.

§. 205. Unendliche Decimalbrüche.

Zus. Also giebt es viele Brüche, die einem Decimalbruche von unendlich vielen Decimalstellen gleich sind; man pflegt sie deshalb unendliche Decimalbrüche zu nennen, z. B. $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ und alle diejenigen, welche im vorigen §phen mit Puncten fortgesetzt sind.

§. 206.

Zus. Hieraus erhellt also auch, daß es viele Brüche giebt, welche die Summe einer unendlichen Menge von Decimalbrüchen sind. Z. B.

$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}$ u. s. w.

$\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000}$ u. s. w.

$\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000}$ u. s. w.

§. 207.

Anmerk. Der nach dieser Aufgabe gefundene Decimalbruch ist also in den meisten Fällen kleiner, als der gegebene; allein je länger man die Division

mittelst angehängter Nullen fortsetzt, desto näher kommt der Werth des Decimalbruchs dem Werthe des gegebnen, und man kann ihn also so genau heben, daß das Fehlende nicht mehr einen Million-, Billion-, Trillion-Theil von 1 u. s. w. beträgt. Da nun das Rechnen mit Decimalbrüchen so ungemein bequem ist; so ist in practischen Rechnungen, die nicht eine ganz vollkommne Schärfe erfordern, oder auch wol, ihrer Natur nach, sie nicht einmal verstatten, die Verwandlung der Brüche in Decimalbrüche außerordentlich vortheilhaft.

V—t.

3. Von einstimmigen und entgegengesetzten Größen und Zahlen.

§. 208.

Erklär. Wenn zwey Größen von der Art sind, daß, wenn man sie beide zusammennimmt, die eine dadurch um so viel größer wird, als die andere beträgt, so nennt man sie Größen von einerley Bedingung (quanta ejusdem conditionis), oder kürzer, einstimmige Größen. So sind z. B. 100 Rthlr. Vermögen und 30 Rthlr. Vermögen, = 130 Rthlr. Vermögen, eben sowohl einstimmige Größen als 100 Rthlr. Schulden und 30 Rthlr. Schulden, = 130 Rthlr. Schulden. Sind hingegen zwey Größen von der Art, daß, wenn man sie beide zusammennimmt, die eine dadurch ganz verschwindet, und die andere um so viel kleiner wird, als die erstere beträgt, indem man sie mit ihr als einstimmig betrachtet, so nennt man sie Größen von entgegengesetzter Bedingung (quanta contrariae conditionis), oder kürzer, entgegengesetzte Größen. Dergleichen sind

Ver-

Vermögen und Schulden; vor- und rückwärtsgehen; rechts und links sich bewegen; steigen und fallen, u. s. w. Z. B. wenn jemand 100 Rthlr. Schulden bey 30 Rthlr. Vermögen hat, so hat er, wenn man beides zusammennimmt, kein Vermögen mehr, sondern reine 70 Rthlr. Schulden; wäre im Gegentheil das Vermögen 100 Rthlr. und die Schulden betrügen 30 Rthlr., so hätte er keine Schulden mehr, sondern 70 Rthlr. reines Vermögen, indem von den 100 Rthlrn. Vermögen 30 Rthlr. Schulden abgehen.

§. 209.

Zus. Alle gleichartige Größen gehören zu den einstimmigen (§. 28.). Z. B. Schulden und Schulden.

§. 210.

Zus. Also sind zwey entgegengesetzte Größen, als solche betrachtet, ungleichartig (§. 209.), mithin weder gleich, noch ungleich (§. 5.). Z. B. Vermögen und Schulden sind, als solche betrachtet, ungleichartige Größen, und man kann weder sagen, daß 30 Rthlr. Vermögen und 30 Rthlr. Schulden einander gleich, noch daß das eine von ihnen größer oder kleiner sey, als das andere.

§. 211.

Zus. Wenn man daher zwey entgegengesetzte Größen zusammenaddirt, so ist die Summe nicht ein Ganzes, dessen wirkliche Theile die Summanden wären (§. 8.). Z. B. wenn man 100 Rthlr. Vermögen und 30 Rthlr. Schulden addirt, so ist zwar die Summe 70 Rthlr. Vermögen, aber 100 Rthlr. Vermögen kann nicht als ein Theil von 70 Rthlr. Vermögen angesehen werden.

§. 212.

Zus. Wenn man also zwey entgegengesetzte Größen, der Quantität nach, mit einander vergleichen, und sie als gleich oder ungleich ansehen will, so muß man sie erst als gleichartig betrachten (§. 5.), mithin als einstimmig (§. 209.). Z. B. um 10 Rthlr. Schulden und 20 Rthlr. Vermögen der Quantität nach zu vergleichen, muß man blos an die Zahlen 10 und 20 denken, und so lange die Begriffe von Schulden und Vermögen beyseite setzen.

§. 213.

Zus. Diejenige von zwey entgegengesetzten Größen, die bey ihrer Addition verschwindet, kann nicht diejenige seyn, die mit der andern, als einstimmig betrachtet, größer als diese ist. Denn die andere soll, ihrem Begriffe nach, um so viel kleiner werden, als die verschwindende beträgt, folglich soll die letztere, von der erstern subtrahirt, eine gleichartige Differenz geben (§. 18.); folglich, da sie mit der Differenz zusammen der erstern Größe gleich ist (§. 37.), ein Theil von dieser seyn (§. 8.), also kann sie nicht größer seyn als diese. Z. B. wenn man 100 Rthlr. Vermögen und 30 Rthlr. Schulden addirt, so kann nicht das Vermögen verschwinden, denn sonst müßten sich die 30 Rthlr. Schulden um 100 Rthlr. Schulden vermindern, und eine Schuld hervorbringen, die mit 100 Rthlrn. Schulden zusammen 30 Rthlr. Schulden ausmachte, und sonach müßte der Theil größer seyn, als das Ganze.

§. 214.

Zus. Wenn man also zwey entgegengesetzte Größen addirt, so ist die verschwindende von ihnen entweder der andern gleich, oder kleiner als diese. Z. B.

10 Rthlr. Vermögen zu 8 Rthlr. Schulden = 2 Rthlr. Vermögen; wo die verschwindende Größe, 8 Rthlr. Schulden, kleiner als die 10 Rthlr. Vermögen ist.

§. 215.

Zus. Wenn daher zwey entgegengesetzte Größen, als einstimmig betrachtet, einander gleich sind, so ist ihre Summe = 0. Z. B. wenn man 100 Rthlr. Vermögen und 100 Rthlr. Schulden addirt, so ist die Summe = 0, denn die eine verschwindet ganz, und die andere wird um so viel kleiner, als die erste, mit ihr als einstimmig betrachtet, beträgt. Nun aber ist diese nach der Voraussetzung, so betrachtet, ihr gleich, folglich wird die andere um so viel kleiner, als sie selbst beträgt, mithin verschwindet sie gleichfalls (§. 40.); also ist die Summe = 0.

§. 216.

Zus. Zwey entgegengesetzte Größen, die, als einstimmig betrachtet, ungleich sind, werden addirt, wenn man die kleinere von entgegengesetzter Bedingung nimmt, und sie alsdenn von der größern subtrahirt, z. B. 30 Rthlr. Vermögen + 100 Rthlr. Schulden = 100 Rthlr. Schulden — 30 Rthlr. Schulden = 70 Rthlr. Schulden. Denn die kleinere Größe verschwindet ganz (§. 214.), folglich wird die größere um so viel kleiner, als die kleinere mit ihr, als einstimmig betrachtet, d. i. von entgegengesetzter Bedingung genommen, beträgt. Also bekommt man die Summe, wenn man die kleinere von entgegengesetzter Bedingung nimmt, und sie alsdenn von der größern subtrahirt (§. 36.).

§. 217.

Zus. Keine Zahl ist an sich einer andern Zahl entgegengesetzt, sondern alle Zahlen sind, an sich be-

trachtet, einstimmige Größen. Denn alle Zahlen sind, als solche betrachtet, gleichartige Größen, mithin einstimmige (§. 209.), also ist keine Zahl an sich der andern entgegengesetzt. Z. B. 6 und 8 sind an sich nicht einander entgegengesetzt, sondern dieses geschieht erst alsdenn, wenn man etwa bey der 6 an 6 Rthlr. Vermögen, und bey der 8 an 8 Rthlr. Schulden denkt.

§. 218.

Anm. Dieser letztere Satz muß wohl erwogen werden, wenn man nicht auf unrichtige Begriffe gerathen will. Die Lehre von den entgegengesetzten Größen ist keine willkührliche Erdichtung der Mathematiker, sondern es giebt allerdings Größen, die ihrer Natur nach einander entgegengesetzt sind, so daß sie durch ihre Verbindung einander ganz oder zum Theil aufheben. Z. B. Vermögen und Schulden; vor- und rückwärtsgehen u. s. w. Dagegen können zwey Zahlen, an sich betrachtet, durch ihre Verbindung einander weder ganz, noch zum Theil aufheben, sondern, wenn man z. B. 7 und $\frac{2}{3}$ zusammenaddirt, so enthält die Summe sowohl die eine, als die andere, als ihre wirklichen Theile, denn 7 und $\frac{2}{3}$ sind an sich, d. i. als bloße Zahlen betrachtet, gleichartige, mithin einstimmige Größen, zwischen welchen an sich nicht die mindeste Entgegensetzung vorhanden ist. Daher liegt bey entgegengesetzten Größen, deren Quantität durch Zahlen ausgedruckt ist, z. B. bey 30 Rthlr. Vermögen und 30 Gulden Schulden die Entgegensetzung nicht in den Zahlen 30 und 100, auch nicht in den Thalern und Gulden, denn diese werden ebenfalls als gleichartig, nemlich als Geld, betrachtet, sondern blos in den Größen; Vermögen und Schulden, als Capitalien von entgegengesetzter Bedingung.

§. 219.

§. 219. Poſitive und negative Größen.

Erklär. Von zwey entgegengeſetzten Größen nennt man willkührlich eine die poſitive, und die andere die negative. Z. B. man nennt entweder Vermögen eine poſitive Größe, und ſo heißt alsdenn die Schuld eine negative; oder man nennt, umgekehrt, die Schuld eine poſitive Größe, ſo heißt denn das Vermögen eine negative. Eben ſo, wenn Steigen poſitiv heißt, ſo heißt Fallen negativ. Die Bezeichnung der poſitiven und negativen Größen beſteht darin, daß man die poſitiven durch +, und die negativen durch — unterſcheidet, und jede ſo bezeichnete Größe an ſich als eine zu addirende betrachtet. Z. B. $+a$ heißt: die Größe a poſitiv genommen und addirt; $-a$ heißt, die Größe a negativ genommen und addirt. Wenn man daher mehrere Größen, die + und — haben, an einander ſetzt, ſo heißt dieſes ſo viel, als: dieſe poſitiven und negativen Größen ſollen addirt werden, und wenn die erſte eine poſitive iſt, ſo läßt man vor dieſer das Zeichen + ganz weg. Z. B. die Formel $3a - 7a + 4b - 12c - 8b$ bedeutet ſoviel: zur poſitiven Größe $3a$ ſollen die negative $-7a$, die poſitive $+4b$, und die negativen $-12c$ und $-8b$ insgeſammt addirt werden. Um aber die Addition und Subtraction negativer Größen ohne Verwirrung gleichfalls durch + und — anzeigen zu können, ſo wollen wir anfänglich die poſitiven durch einen bloßen Buchſtaben, ohne Zeichen, ausdrucken; die negativen aber, mit dem Zeichen —, in eine Parentheſe einſchließen, und denn das erforderte Additions- oder Subtractionszeichen vor dieſelben ſetzen. Z. B. a, b, c u. ſ. w. ſollen poſitive Größen bedeuten, $(-a)$, $(-b)$ hingegen negative. $a + (-b)$ heißt: die negative Größe $(-b)$ ſoll zur poſitiven a addirt werden, und $a - (-b)$ heißt: die negative $(-b)$ ſoll von der poſitiven a ſubtrahirt werden.

§. 220.

Zus. Also sind Zahlen, an sich betrachtet, weder positiv, noch negativ; denn keine ist der andern, an sich, entgegengesetzt. Z. B. die Zahl 10 und 12 an sich hat man weder als positiv, noch als negativ anzusehen.

§. 221.

Zus. Lauter positive, imgleichen lauter negative Größen sind als solche gleichartig, also auch einstimmige Größen (§. 209.), also ist die Summe und die Differenz positiver Größen gleichfalls positiv; und die Summe und Differenz negativer Größen gleichfalls negativ. Denn die Summe ist ein Ganzes (§. 28.) und die Differenz ein Theil (§. 36.), also jene mit den Summanden, und diese mit dem Minuend gleichartig (§. 8.). Z. B. + 3 Rthlr. und + 2 Rthlr. geben + 5 Rthlr., und hinwiederum bleiben, wenn von — 5 Rthlr. — 3 Rthlr. abgezogen werden, — 2 Rthlr. übrig.

§. 222.

Zus. Größen, von denen die eine positiv, und die andere negativ ist, sind ungleichartig, und daher als solche weder gleich noch ungleich, also ist auch ihre Summe nicht ein Ganzes, dessen wirkliche Theile die Summanden wären, und wenn man sie daher gleich oder ungleich nennen will, so muß man sie erst als einstimmig betrachten (§. 210;212.). Z. B. wenn man 30 Rthlr. Vermögen und 30 Rthlr. Schulden gleich nennen will, so kann es nur in so fern geschehen, als man in beiden Fällen an 30 Rthlr. denkt, auf Vermögen und Schuld aber nun nicht mehr Rücksicht nimmt.

§. 223.

Zus. Wenn man eine Größe durch eine Zahl m an sich multiplicirt, so ist das Product mit der multiplicirten Größe gleichartig, d. i. positiv, oder negativ, oder eine Größe an sich, je nachdem die multiplicirte Größe positiv, oder negativ, oder eine Größe an sich ist. Es ist nemlich $m = \frac{r}{n}$ (§. 162.). Nun wird eine Größe durch $\frac{r}{n}$ multiplicirt, wenn man den nten Theil von ihr r mal nimmt (§. 177.); der nte Theil der Größe aber ist mit ihr gleichartig (§. 8.), und wenn dieser, r mal genommen, das Product giebt, so ist er der rte Theil vom letztern (§. 85.), also ist das Product mit der multiplicirten Größe gleichartig (§. 8.). Z. B. 5 Rthlr. Vermögen mit 3 multiplicirt, giebt 15 Rthlr. Vermögen; 10 Rthlr. Schulden mit 5 multiplicirt, giebt 50 Rthlr. Schulden u. s. w.

§. 224.

Zus. Wenn man eine positive und negative Größe, die, als einstimmig betrachtet, einander gleich sind, zusammenaddirt, so ist ihre Summe $= 0$; d. i. $a + (-a) = 0$ (§. 215.). Z. B. 3 Rthlr. Vermögen und 3 Rthlr. Schulden heben sich bey der Addition auf.

§. 225.

Zus. Wenn man also zu einer Größe einerley positive und negative Größe zugleich addirt, so bleibt sie ungeändert; d. i. $b + a + (-a) = b$. Es ist nemlich $b + a + (-a) = b + (a + (-a))$ (§. 31.) $= b + 0$ (§. 224.) $= b$. Z. B. $6 + 4 + (-4) = 6$.

§. 226.

Zus. Eine positive und negative Größe, die, als einstimmig betrachtet, ungleich sind, werden addirt, wenn man die kleinere von entgegengesetzter Bedingung nimmt, und sie alsdenn von der größern subtrahirt; d. i. wenn $a < b$ ist, so ist $b + (-a) = b - a$; und wenn $b < a$ ist, so ist $b + (-a) = (-a) - (-b)$ (§. 216.). Z. B. zu $+ 6$ eine $- 4$ addirt, ist $= + 6 - 4 = + 2$. Oder: zu $+ 4$ eine $- 6$ addirt, ist $= (-6) - (-4) = -2$.

§. 227.

Zus. Eine positive oder negative Größe von irgend einer Größe b subtrahiren, ist eben so viel, als sie von entgegengesetzter Bedingung nehmen, und alsdenn zu b addiren. Denn da $b = b + a + (-a)$ (§. 225.), so ist $b - a = b + (-a)$, und $b - (-a) = b + a$ (§. 38.). Also heißt die positive Größe a von b subtrahiren eben so viel, als die negative $(-a)$ zu b addiren, und die negative Größe $(-a)$ von b subtrahiren, heißt eben so viel, als die positive a zu b addiren. Z. B. ein Vermögen von 100 Rthlr. um 10 Rthlr. dieses Vermögens vermindern, ist eben so viel, als jemandem, der 100 Rthlr. Vermögen hat, eine Schuld von 10 Rthlr. aufbürden; er wird in beiden Fällen nur noch 90 Rthlr. Vermögen besitzen. Eben so: jemandem, der 100 Rthlr. Vermögen hat, eine Schuld von 10 Rthlr. abnehmen, ist eben so viel, als wenn man sein Vermögen um 10 Rthlr. vergrößert, denn er wird in jedem Falle nun 110 Rthlr. Vermögen haben.

§. 228.

Zus. Also ist $+ (-a) = -a$; und $-(-a) = + a$, d. i. eine zu addirende negative Größe $(-a)$ heißt

heißt eben so viel, als die zu subtrahirende positive a; und eine zu subtrahirende negative Größe (—a) ist eben so viel, als die zu addirende positive a (§. 227.). Z. B. jemandem eine Schuld zuwenden, ist eben das, als wenn man ihm ein eben so großes Stück seines Vermögens abnimmt; so wie es im Gegentheil einerley ist, ob ich jemandem eine Schuld abnehme, oder sein Vermögen um so viel, als sie beträgt, vergrößere.

§. 229.

Zus. Also sind die positiven und negativen Größen einander in der Art entgegengesetzt, daß, wenn man die einen als zu addirende Größen betrachtet, die andern zu subtrahirende Größen vorstellen, und umgekehrt (§. 228.); und es ist also einerley, ob man z. B. in der Formel 3 Rthlr. + 7 Rthlr. — 4 Rthlr. — 2 Rthlr. alle vier Größen als einstimmige betrachtet, von denen die beiden erstern addirt, die beiden letztern aber subtrahirt werden sollen, oder ob man die beiden erstern als zu addirende positive, und die beiden letztern als zu addirende negative Größen ansieht.

§. 230.

Zus. Aus diesem Grunde kann man auch Zahlen, die an sich alle einstimmig sind, als entgegengesetzte Größen betrachten, wenn man die eine als eine zu addirende, und die andere als eine zu subtrahirende ansieht, und daher jener das Additionszeichen +, dieser aber das Subtractionszeichen — vorsetzt, z. B. + 3 und — 3 (§. 229.).

§. 231.

Anmerk. Man muß sich sehr hüten, den Begriff des Positiven hier nicht mit dem Begriff des

Realen für einerley zu halten, und etwa die positiven Größen als reale, die negativen hingegen als solche zu betrachten, die nicht nur nichts Reales, sondern noch weniger als Mangel der Realität sind. Die negativen Größen sind vielmehr an sich eben so reale Größen, als die positiven. Z. B. Schuld ist eben sowohl etwas Reales als Vermögen; Steigen eben so real als Fallen u. s. w. Daher ist es auch bey entgegengesetzten Größen ganz willkührlich, welche von ihnen man für die positiven oder negativen annehmen will, und man kann jede als die negative der andern betrachten, z. B. Schuld ist negatives Vermögen, und Vermögen negative Schuld; Steigen ist negatives Fallen, und Fallen negatives Steigen u. s. w. Positiv bedeutet also hier nichts weiter, als diejenige von zwey entgegengesetzten Größen, die man bey einer Untersuchung eigentlich zum Hauptzwecke hat, wobey es aber doch in den mehresten Fällen von unserer Willkühr abhängt, welche von ihnen wir uns zum Hauptzwecke setzen wollen. Hieraus ist zugleich klar, daß solche Größen, die man gar nicht als andern entgegengesetzt betrachtet, in der hier angenommenen Bedeutung der Wörter, weder positive, noch negative, sondern nur überhaupt einstimmige Größen sind.

§. 232.

Anm. Wer kein Vermögen hat und 100 Rthlr. schuldig ist, von dem kann man allerdings sagen: er hat weniger als Nichts; denn wenn er 100 Rthlr. bekommt, so hat er jetzt erst nichts, da er doch jetzt mehr hat als vorhin. Eben so kann man von einem Schiffer, der nach Westen will, aber vom Sturm 3 Meilen nach Osten getrieben wird, ganz wohl sagen: seine Fahrt macht 3 Meilen weniger als Nichts

aus,

aus, denn er muß erst 3 Meilen zurücksegeln, bis seine abgezielte Fahrt Nichts wird. Allein es ist zugleich klar, daß hier der Ausdruck: weniger als Nichts, blos in Beziehung auf die entgegengesetzte Größe zu nehmen ist; nämlich 100 Rthlr. Schulden sind weniger als nichts in Beziehung auf wirkliches Vermögen; und eine Fahrt nach Osten ist in Beziehung auf die abgezweckte Fahrt nach Westen weniger als nichts. In diesem Sinne kann man also richtig sagen: eine negative Größe ist kleiner als nichts, nemlich in Beziehung auf die ihr entgegengesetzte positive, und in eben diesem Sinne kann man daher auch sagen, daß die negativen Größen kleiner sind, als die positiven, und immer kleiner werden, je größer die Zahl wird, die sie ausdruckt. Z. B. wer 100 Rthlr. schuldig ist, hat 200 Rthlr. weniger Vermögen, als der, welcher 100 Rthlr. im Vermögen hat, denn er muß sich erst 200 Rthlr. Vermögen erwerben, bis er 100 Rthlr. im Vermögen hat; wer aber nur 3 Rthlr. schuldig ist, der hat nur 103 Rthlr. weniger Vermögen, als der, welcher 100 Rthlr. im Vermögen hat, denn um eben so viel zu besitzen, darf er nur 103 Rthlr. erwerben, folglich hat der, welcher 100 Rthlr. schuldig ist, weniger Vermögen als der, welcher nur 3 Rthlr. schuldig ist, obgleich beide kein Vermögen haben. Wollte man dagegen die negativen Größen an sich selbst, oder im absoluten Verstande, für kleiner als nichts halten, ja wol gar die positiven als solche, die größer als nichts, und die negativen, die kleiner als nichts sind, definiren, so wäre dieses offenbar falsch, indem die negativen Größen an sich eben so reale Größen, als die positiven, und daher eben sowohl, als diese, mehr als Nichts sind.

§. 233.

§. 233.

Erklär. Zwey Zahlen heißen einander entgegengesetzt, in so fern man die eine als eine zu addirende, und die andere als eine zu subtrahirende betrachtet. Diejenigen Zahlen, die man als zu addirende betrachtet, nennt man positive; diejenigen aber, die man als zu subtrahirende ansieht, nennt man negative Zahlen. Vor jene setzt man daher das Additionszeichen +, vor diese das Subtractionszeichen —. Z. B. + 4 heißt eine positive, — 4 eine negative Zahl.

§. 234.

Zus. Es wird also eine Größe a durch eine positive Zahl + m multiplicirt, wenn man sie durch die Zahl m an sich multiplicirt, und das Product als eine zu addirende Größe betrachtet. Z. B. 10 Rthlr. mit + 4 multiplicirt, giebt + 40 Rthlr. Es entsteht nemlich das Product aus der Größe a eben so, wie der Multiplicator + m aus der Zahl 1 (§. 70.). Nun ist aber + m die zu addirende Zahl (per defin.), und $m = 1 \times m$; folglich entsteht + m aus der Zahl 1, wenn man 1 durch m multiplicirt, und das Product m als eine zu addirende Zahl betrachtet. Also entsteht auch das Product aus der Größe a, wenn man sie durch m multiplicirt, und das Product $a \times m$ als eine zu addirende Größe betrachtet.

§. 235.

Zus. Eine Größe a wird auf ähnliche Art durch eine negative Zahl — m multiplicirt, wenn man sie durch die Zahl m an sich multiplicirt, und das Product als eine zu subtrahirende Größe ansieht. Z. B. 10 Rthlr. multiplicirt durch — 4, giebt zum Product — 40 Rthlr. Der Beweis ist wie der vorige.

§. 236.

Lehrsatz. Wenn man eine positive Größe durch eine positive Zahl multiplicirt, so ist das Product positiv, d. i. $+a \times +m = +a \times m$. Z. B. + 4 Rthlr. 3mal genommen, ist = + 12 Rthlr.

Beweis. Es wird + a durch + m multiplicirt, wenn man + a durch m an sich multiplicirt, und das Product als eine zu addirende Größe betrachtet (§. 234.), allein wenn man + a durch m multiplicirt, so ist das Product $+a \times m$ positiv (§. 223.), also ist das Product eine zu addirende Größe $+a \times m$, mithin eine positive Größe (§. 219.). Man kann also auch im allgemeinen sagen, daß +mal + ebenfalls + gebe.

§. 237.

Lehrs. Wenn man eine negative Größe durch eine positive Zahl multiplicirt, so ist das Product negativ, d. i. $-a \times +m = -a \times m$. Z. B. — 4 Rthlr. + 3mal genommen, giebt — 12 Rthlr.

Beweis. Es wird — a durch + m multiplicirt, wenn man — a durch m an sich multiplicirt, und das Product als eine zu addirende Größe betrachtet (§. 234.). Allein wenn man — a durch m multiplicirt, so ist das Product $-a \times m$ negativ (§. 223.), also ist das Product eine zu addirende, das Zeichen — vor sich habende Größe: $-a \times m$, folglich eine negative Größe (§. 219.). Folglich giebt — durch + multiplicirt: —.

§. 238.

Lehrs. Wenn man eine positive Größe durch eine negative Zahl multiplicirt, so ist das Product negativ, d. i. $+a \times -m = -a \times m$. Z. B. + 4 Rthlr. — 3mal genommen, giebt — 12 Rthlr.

Beweis. Es wird + a durch — m multiplicirt, wenn man + a durch m an sich multiplicirt, und das Product als eine zu subtrahirende Größe betrachtet (§. 235.). Allein, wenn man + a durch m multiplicirt, so ist das Product + a ⋈ m positiv (§. 223.), folglich ist das verlangte Product eine zu subtrahirende positive Größe: + a ⋈ m. Diese aber ist eben so viel, als die zu addirende negative: — a ⋈ m (§. 228.), also ist das Product eine negative Größe (§. 219.), und es giebt + durch — multiplicirt, —.

§. 239.

Lehrs. Wenn man eine negative Größe durch eine negative Zahl multiplicirt, so ist das Product positiv, d. i. — a ⋈ — m = + a ⋈ m. Z. B. — 4 Rthlr. — 3mal genommen, giebt + 12 Rthlr.

Beweis. Denn — a wird durch — m multiplicirt, wenn man — a durch m an sich multiplicirt, und das Product als eine zu subtrahirende Größe betrachtet (§. 235.). Allein, wenn man — a durch m multiplicirt, so ist das Product — a ⋈ m negativ (§. 223.), folglich ist das verlangte Product eine zu subtrahirende negative Größe: — a ⋈ m. Diese aber ist eben so viel, als eine zu addirende positive: + a ⋈ m (§. 228.), also ist das Product eine positive Größe (§. 219.), und es giebt — durch — multiplicirt, +.

§. 240.

Lehrs. Bey der Multiplication positiver und negativer Größen durch positive und negative Zahlen geben einerley Zeichen +, und verschiedene —.

Beweis. Denn + durch + multiplicirt, giebt + (§. 236.), und — durch — multiplicirt, giebt

giebt gleichfalls + (§. 239). Dagegen giebt — durch + multiplicirt, — (§. 237.), und + durch — multiplicirt, giebt gleichfalls — (§. 238.).

§. 241.

Anm. Da es bey den Mathematikern, ehe sie mit der wahren Natur entgegengesetzter Größen genauer bekannt wurden, eine geraume Zeit hindurch üblich war, sich die positiven Größen beständig als Vermögen, und die negativen als Schulden zu denken, so veranlaßte der letztere Lehrsatz, daß man zu sagen pflegte: Vermögen mit Vermögen multiplicirt, giebt Vermögen; und Schulden mit Schulden multiplicirt, geben gleichfalls Vermögen; aber Vermögen mit Schulden, oder Schulden mit Vermögen multiplicirt, giebt allemal Schulden. Allein da der Multiplicator jedesmal nothwendig eine Zahl seyn muß (§ 72.), so haben alle diese Redensarten gar keinen Sinn, und es sagt überhaupt die Multiplication einer Größe durch eine positive oder negative Zahl nichts weiter, als daß man die Größe durch die Zahl an sich multipliciren, und das Product im ersten Falle als eine zu addirende, im zweyten aber als eine zu subtrahirende Größe betrachten soll (§. 234: 235.); d. i. daß man es im erstern Falle mit der multiplicirten Größe von eben derselben (§. 219.), im zweyten aber von entgegengesetzter Bedingung nehmen soll (§. 228.). Alles Paradoxe, das man in der Multiplication entgegengesetzter Größen sucht, ist also leeres Blendwerk, und jene aus mehr als einem Grunde fehlerhafte Redensarten sollten billig aus der Mathematik gänzlich verwiesen werden.

§. 242.

Lehrs. Bey der Division positiver und negativer Größen durch positive und negative Zahlen, geben einerley Zeichen +, verschiedene —. Z. B. + 12 Rthlr. durch + 3 dividirt, giebt + 4 Rthlr.; desgleichen auch — 12 durch — 3 dividirt, giebt + 4 Rthlr. Hingegen — 12 Rthlr. durch + 3 dividirt, giebt — 4 Rthlr., und eben so giebt + 12 durch — 3 dividirt, — 4 Rthlr.

Beweis. Man setze erstlich $\frac{+a}{+m} = c$, so ist $+a = c \times +m$ (§. 87) Nun kann nicht c negativ seyn, denn sonst wäre $c \times +m$ negativ (§. 237.), also ist c, d. i. $\frac{+a}{+m}$, positiv.

Man setze zweytens $\frac{-a}{-m} = c$, so ist $-a = -c \times -m$ (§. 87). Nun kann nicht c negativ seyn, weil sonst $c \times -m$ positiv wäre (§. 239.), also ist c, d. i. $\frac{-a}{-m}$, positiv.

Man setze drittens $\frac{+a}{-m} = c$, so ist $+a = c \times -m$ (§. 87.). Nun kann nicht c positiv seyn, weil sonst $c \times -m$ negativ wäre (§. 238.), also ist hier c, d. i. $\frac{+a}{-m}$, negativ.

Man setze viertens $\frac{-a}{+m} = c$, so ist $-a = c \times +m$ (§. 87.). Nun kann nicht c positiv seyn,

weil

weil sonst $c \times + m$ positiv wäre (§. 236.), also ist hier c, d. i. $\frac{-a}{+m}$, negativ.

§. 243.

Anm. Da der Divisor allemal eine Zahl seyn muß (§. 89.), so ist von selbst klar, daß auch die Ausdrücke: Vermögen durch Vermögen oder Schuld, und Schuld durch Schuld oder Vermögen dividirt, keinen Sinn haben, und daß eine Größe durch eine positive oder negative Zahl dividiren, nichts weiter heißt, als sie durch die Zahl an sich dividiren, und den Quotienten im erstern Fall mit ihr von einerley, im zweyten aber von entgegengesetzter Bedingung nehmen.

§. 244.

Erklär. Eine Größe oder Zahl, die allgemein entweder durch einen einzigen Buchstaben, oder auch durch mehrere, aber nicht durch + und — verknüpfte, ausgedruckt wird, heißt eine einfache Größe, z. B. $+3a$, $-3a$; $+4a \times b$, $-4a \times b$, $+4\frac{a}{b}$, $-4\frac{a}{b}$ u. s. w. Eine solche Größe oder Zahl aber, die aus mehrern durch + oder — verknüpften Größen oder Zahlen bestehet, heißt eine zusammengesetzte, z. B. $4a + 7a$; $4a \times b - 5a \times c$ u. s. w. Schließt man eine zusammengesetzte Größe in eine Parenthese ein, so sieht man alles, was in der Parenthese befindlich ist, als eine einzige einfache Größe an. Z. B. $(5a - 4b)$ oder $(7\frac{a}{b} - 4c)$ u. s. w. Die Zahl, die vor einer durch Buchstaben ausgedruckten Größe gesetzt wird, und ihre Quan-

tität bestimmt, heißt ihr Coefficient, z. B. in dem Ausdrucke $7\frac{a}{b}$ ist 7 der Coefficient. Größen, die sich durch nichts, als durch die Coefficienten unterscheiden, sie mögen übrigens einstimmige oder entgegengesetzte seyn, heißen Größen von einerley Ausdruck, z. B. $+ 8ab$, $- 3ab$ u. s. w. Solche hingegen, die noch irgend worin anders, entweder in den Buchstaben selbst, oder in der Art ihrer Verbindung, von einander verschieden sind, heißen Größen von verschiedenem Ausdruck, z. B. $+ 3a$, $+ 4b$, $+ 5ab$, $- 5ac$ u. s. w. Sollen Zahlen, die durch Buchstaben ausgedruckt sind, durch einander multiplicirt werden, so setzt man sie ohne das Multiplicationszeichen unmittelbar neben einander, z. B. wenn man die Größe oder Zahl b durch die Zahl a multipliciren soll, so drückt man das Product durch ab aus.

§. 245.

Aufgabe. Größen, sie mögen positiv oder negativ seyn, zu addiren.

Auflös. Erster Fall. Sind sie alle von verschiedenen Ausdrücken, so setze man sie blos mit ihren Zeichen neben einander (§. 219.). Z. B. wenn $+ 3a$ und $- 4b$ nebst $+ 8c$ addirt werden sollen, so ist die Summe $= 3a - 4b + 8c$.

Zweyter Fall. Sind sie alle von einerley Ausdruck, und hiebey

1) Entweder alle positiv, oder alle negativ; so addire man ihre Coefficienten, und setze vor die Summe im erstern Fall +, im andern — (§. 221.). Z. B. + 3 Rthlr. + 5 Rthlr. = + 8 Rthlr.; ferner — 3 Rthlr. — 5 Rthlr. = — 8 Rthlr.;

— 8 Rthlr.; oder: + 4 ab + 7 ab + 3 ab = + 14 ab, und — 4 ab — 7 ab — 3 ab = — 14 ab.

2) Ist die eine positiv, und die andere negativ, so subtrahire man den kleinern Coefficienten vom größern, und setze vor das, was herauskommt, das Zeichen der größern (§. 226.). Z. B. + 8 Rthlr. — 3 Rthlr. = + 5 Rthlr., und + 3 Rthlr. — 8 Rthlr. = — 5 Rthlr.; imgleichen + 14 a — 23 a = — 9 a.

3) Sind mehrere, sowohl positive, als negative Größen von einerley Ausdruck zu addiren, so addire man nach Nr. 1. sowohl die positiven, als die negativen besonders, ziehe alsdenn nach Nr. 2. die kleinere Summe von der größern ab, und setze vor das, was herauskommt, das Zeichen der größeren. Z. B. wenn ich addiren soll: + 5 a — a + 7 a — 8 a — 34 a; so ist + 5 a + 7 a = + 12 a; und — a — 8 a — 34 a = — 43 a, also die Summe von + 12 a — 43 a = — 31 a.

Dritter Fall. Sind sowohl Größen von einerley, als von verschiedenem Ausdruck zu addiren, so addire man jene nach dem zweyten Fall, und setze nach dem ersten Fall ihre Summe und die Größen von verschiedenem Ausdruck neben einander. Z. B.

$$\begin{array}{l} 2a + 7b - 5c - d + 4e - f \\ 6a - 8b - 5c + d - 3e + 2g \\ \hline \end{array}$$

Summe = 8 a — b — 10 c + e — f + 2 g

oder: 7 Duc. — 2 Rthlr. + 7 Gr.
3 Duc. + 1 Rthlr. — 18 Gr. — 4 Pf.

Summe = 10 Duc. — 1 Rthlr. — 11 Gr. — 4 Pf.

§. 246.

Aufgabe. Größen, sie mögen positiv oder negativ seyn, von einander zu subtrahiren.

Auflös. Man verwandle das Zeichen eines jeden Subtrahends in das entgegengesetzte, und addire sie alsdenn (§. 245.), so ist das, was herauskommt, die verlangte Differenz (§. 227.). Z. B.

$$2a + 7b - 5c - d + 4e - f$$
$$6a - 8b - 5c + d - 3e + 2g$$

Differenz $- 4a + 15b - 2d + 7e - f - 2g$

oder: 7 Duc. — 2 Rthlr. + 7 Gr.
3 Duc. + 1 Rthlr. — 18 Gr. — 4 Pf.

Differenz = 4 Duc. — 3 Rthlr. + 25 Gr. + 4 Pf.

§. 247.

Aufgabe. Positive oder negative Größen durch positive oder negative Zahlen zu multipliciren.

Auflös. Man multiplicire jede einfache Größe des Multiplicands durch jede einfache des Multiplicators dergestalt, daß man die Coefficienten multiplicirt, die Buchstaben aber unmittelbar an einander setzt (§. 244.), und setze vor jedes Product die Zeichen + oder —, nach der Regel: einerley Zeichen geben +, verschiedene — (§. 240.), alsdann addire man alle einzelnen Producte zusammen (§. 245.), so hat man das verlangte Product. Z. B.

$$+ 5a \times - 4m = - 20am$$
oder: $- 6c \times - 3r = + 18cr.$

$$\begin{array}{l} 3a - 4b + c \\ 2m - n + 7r \\ \hline + 21ar - 28br + 7cr \\ - 3an + 4bn - cn \\ + 6am - 8bm + 2cm \\ \hline \end{array}$$

Product $+ 21ar - 3an + 6am - 28br + 4bn - cn + 6am - 8bm + 2cm.$

§. 248.

Aufgabe. Positive oder negative Größen durch positive oder negative Zahlen zu dividiren.

Auflös. Man verfahre eben so, wie bey der Division ganzer Zahlen (§. 106.), und befolge in Ansehung der Zeichen die Regel: einerley Zeichen geben +, verschiedene — (§. 242.). Z. B.

$$-4m \mid -20am \mid +5a$$

$$-3r \mid +18cr \mid -6c$$

$$\begin{array}{r|l|l} 2m - n & 6am - 3an - 8bm + 4bn & 3a - 4b \\ & 6am - 3an - 8bm + 4bn & \\ \hline & \quad * \qquad\qquad * & \end{array}$$

Beweis. Weil die gefundene Größe, durch den Divisor multiplicirt, den Dividend giebt, so ist sie der verlangte Quotient (§. 86.).

4. Von den Potenzen und Wurzeln der Zahlen.

§. 249. Potenz, Dignität, Exponent, Grad der Potenz, Wurzel ꝛc.

Erklärung. Ein Product aus lauter gleichen Factoren, in welchem also jeder Factor dieselbe Zahl ist, heißt eine Potenz oder Dignität des Factors, und die Zahl der Factoren heißt der Grad, imgleichen der Exponent der Potenz. Nämlich ein Product aus zwey gleichen Factoren heißt die zweyte Potenz des Factors, oder seine Quadratzahl, auch kurz sein Quadrat. Ein Product aus drey gleichen Factoren heißt die dritte Potenz des Factors, oder seine Cubikzahl, auch kurz sein Cubus. Ein Product aus vier gleichen Factoren heißt die vierte Potenz des Factors, oder sein Biquadrat u. s. w., und so überhaupt ein Product aus n gleichen Factoren die nte Potenz des Factors. Z. B. da $3 \times 3 = 9$; $3 \times 3 \times 3 = 27$; $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$; $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ ist; so ist 9 das Quadrat, 27 der Cubus, 81 das Biquadrat, 243 die 5te Potenz von 3; und überhaupt ist aa das Quadrat, aaa der Cubus, aaaa das Biquadrat, aaaaa die 5te Potenz von a u. s. w. ohne Ende.

Die Zahl, von welcher eine gegebne Zahl b das Quadrat ist, heißt die Quadratwurzel von b; diejenige, von welcher b der Cubus ist, heißt die Cubikwurzel von b; diejenige, von welcher b das Biquadrat ist, die Biquadratwurzel von b u. s. w.; und überhaupt diejenige, von welcher b die nte Potenz ist, die Wurzel des nten Grades, oder kürzer, die nte Wurzel von b, und die Zahl n heißt der Grad oder Exponent der Wurzel. Z. B. 3 ist die Quadrat-

wurzel

wurzel von 9, die Cubikwurzel von 27, die Biquadratwurzel von 81, die 5te Wurzel von 243 u. s. w.

Die nte Potenz einer Zahl a finden, heißt: sie zur nten Potenz erheben. Eine Zahl zur zweyten Potenz erheben, oder ihr Quadrat finden, heißt: sie quadriren; eine Zahl zur dritten Potenz erheben, oder ihren Cubus finden, heißt: sie cubiren.

Die nte Wurzel einer Zahl finden, heißt: die nte Wurzel aus ihr ausziehen, z. B. die Quadratwurzel aus einer Zahl ausziehen, heißt, ihre Quadratwurzel finden; die Cubikwurzel aus ihr ausziehen, heißt, ihre Cubikwurzel finden u. s. w.

Die bequeme Art, den Grad der Potenz einer Zahl zu bezeichnen, besteht darin, daß man den Exponenten derselben etwas rechtwärts über die Zahl setzt, z. B. 3^2 heißt das Quadrat von 3; 3^3 der Cubus von 3; 3^n die nte Potenz von 3. Eben so ist $a^2 = aa$, oder das Quadrat von a; $a^3 = aaa$, oder der Cubus von a; $a^4 = aaaa$, oder das Biquadrat von a; $a^5 = aaaaa$, oder die 5te Potenz von a, und überhaupt a^n die nte Potenz von a.

Die Bezeichnung der Wurzeln einer Zahl besteht darin, daß man vor dieselbe das Wurzelzeichen $\sqrt{}$, und in der Oeffnung desselben den Grad oder Exponenten der Wurzel setzt. Z. B. $\sqrt[3]{27}$ heißt die Cubikwurzel von 27; $\sqrt[4]{81}$ die Biquadratwurzel von 81; $\sqrt[5]{243}$ die fünfte Wurzel von 243; und überhaupt $\sqrt[n]{a}$ die nte Wurzel von a. Bey der Quadrat-

dratwurzel aber läßt man den Exponenten 2, der in dem Wurzelzeichen stehen sollte, der Kürze wegen ganz weg; z. B. $\sqrt{9}$ heißt die Quadratwurzel von 9; $\sqrt{a}$ die Quadratwurzel von a.

§. 250.

Zus. Da eine Potenz ein Product ist, in welchem alle Factoren einerley sind, der Multiplicator aber allemal eine Zahl seyn muß (§. 72.), so sind hier alle Factoren, folglich sowohl alle Wurzeln, als auch alle Potenzen, Zahlen. Also sind Potenzen und Wurzeln, die nicht Zahlen sind, Undinge.

§. 251.

Zus. Da nun alle Zahlen, an sich betrachtet, weder positiv, noch negativ sind (§. 220.), so sind auch alle Wurzeln, imgleichen alle Potenzen, an sich betrachtet, weder positiv noch negativ.

§. 252.

Zus. Da der Exponent einer Potenz bestimmt, wie vielmal derselbe Factor gesetzt werden muß, um die Potenz als das Product zu bekommen, so ist der Exponent allemal eine ganze Zahl (§. 58.), und da jedes Product wenigstens zwey Factoren erfordert (§. 70.), so ist er auch allemal größer als 1, und eben dieses gilt also auch von dem Exponenten einer jeden Wurzel.

§. 253.

Zus. Eben daher ist auch der Exponent einer Potenz, imgleichen einer Wurzel weder positiv, noch negativ, sondern eine Zahl an sich.

§. 254. Quadriren, Cubiren der Zahlen.

Zus. Eine Zahl a wird quadrirt, wenn man sie durch sich selbst; cubirt, wenn man sie durch ihr Quadrat, und überhaupt zur nten Potenz erhoben, wenn man sie durch ihre $(n-1)$te Potenz multiplicirt; d. i. $a^2 = aa$; $a^3 = a \cdot aa = a \cdot a^2$; $a^4 = a \cdot aaa = a \cdot a^3$ u. s. w., also überhaupt $a^n = a \cdot a^{n-1}$.

§. 255. Quadrat- und Cubik-Wurzeltäfelchen.

Zus. Wenn man also die neun ersten Zahlen durch ihr Quadrat, die im Einmaleins stehen, multiplicirt, so hat man folgendes Quadrat- und Cubiktäfelchen:

Wurzel.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubus.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 256.

Zus. Wenn man einer ganzen Zahl eine Null anhängt, so kommen zu ihrem Quadrat zwey Nullen, zum Cubus drey, zum Biquadrat vier u. s. w. Z. B.

$30^2 = 30 \times 30 = 900$

$30^3 = 30 \times 900 = 27000$

$30^4 = 30 \times 27000 = 810000$ (§. 80.).

§. 257. Quadriren und Cubiren der Brüche.

Zus. Ein Bruch wird quadrirt, cubirt, und überhaupt zur nten Potenz erhoben, wenn man den

Zäh-

Zähler und Nenner quadrirt, cubirt, und überhaupt zur nten Potenz erhebt. Denn $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$ $= \frac{a^2}{b^2}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a^2}{b^2}$ (§. 254.) $= \frac{a^3}{b^3}$; und so überhaupt $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (§. 180.).

§. 258. Ausziehen der Wurzeln aus Brüchen.

Zus. Also wird auch aus einem Bruche die Quadratwurzel, Cubikwurzel, und überhaupt die nte Wurzel ausgezogen, wenn man sie aus dem Zähler und Nenner auszieht. Denn vom Bruche $\frac{a^2}{b^2}$ ist die Quadratwurzel $\frac{a}{b}$; vom Bruche $\frac{a^3}{b^3}$ ist die Cubikwurzel $\frac{a}{b}$; und vom Bruche $\frac{a^n}{b^n}$ die nte Wurzel $\frac{a}{b}$ (§. 257.).

§. 259.

Zus. Das Quadrat eines ächten Bruchs ist kleiner als dieser; sein Cubus kleiner als sein Quadrat; und überhaupt jede höhere Potenz desselben kleiner, als die niedrigere. Z. B. von $\frac{2}{3}$ ist das Quadrat $\frac{4}{9}$ kleiner als $\frac{2}{3}$; und der Cubus $\frac{8}{27}$ kleiner als das Quadrat $\frac{4}{9}$ (§. 177.).

§. 260.

Zus. Da a die nte Wurzel von a^n, z. B. a die Cubikwurzel von a^3 ist, so ist $\sqrt[n]{a^n} = a$, oder $\sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{243} = 3$.

§. 261.

Zus. Gleiche Wurzeln haben gleiche Quadrate, gleiche Cubos, und überhaupt gleiche Potenzen von einerley Grad, d. i. wenn $a = b$ ist, so ist auch $a^2 = b^2$; $a^3 = b^3$; und überhaupt $a^n = b^n$ (§. 71.).

§. 262.

Zus. Eine größere Wurzel giebt ein größeres Quadrat, einen größern Cubum, und überhaupt eine größere Potenz von einerley Grad, als eine kleinere; d. i. wenn $a > b$ ist, so ist auch $a^2 > b^2$, $a^3 > b^3$, und überhaupt $a^n > b^n$, oder: $4^2 > 3^2$, d. i. $16 > 9$.

§. 263.

Zus. Also haben gleiche Quadrate, gleiche Cubi, und überhaupt gleiche Potenzen von einerley Grad, auch gleiche Wurzeln, d. i. wenn $a^2 = b^2$, $a^3 = b^3$, oder überhaupt $a^n = b^n$ ist, so ist auch $a = b$. Denn, wäre von den Wurzeln a und b die eine größer, als die andere, so wäre auch die eine Potenz größer, als die andere (§. 262.).

§. 264.

Zus. Ein größeres Quadrat, ein größerer Cubus, und überhaupt eine größere Potenz von einerley

Grad

Grad hat auch eine größere Wurzel, d. i. wenn $a^2 > b^2$, $a^3 > b^3$, und überhaupt $a^n > b^n$ ist, so ist auch $a > b$. Denn es ist nicht $a = b$, weil sonst $a^n = b^n$ wäre (§. 261.).

§. 265.

Lehrsatz. Von einem Bruche $\frac{a}{b}$, dessen Zähler und Nenner endlich sind, und der nicht einer ganzen Zahl gleich ist, kann keine Potenz $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ eine ganze Zahl seyn. Z. B. von $\frac{2}{3}$ kann weder das Quadrat, noch irgend eine andere Potenz eine ganze Zahl werden, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$ u. s. w. bleiben immer Brüche.

Beweis. Denn der Bruch $\frac{a}{b}$ ist entweder durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt, oder nicht.

Im ersten Falle sind a und b Primzahlen unter sich (§. 186.), also haben sie außer der Zahl 1 keinen gemeinschaftlichen Theiler (§. 149.), folglich ist weder die Zahl b, noch ein Theiler derselben der Zahl a, oder einem Theiler derselben gleich.

Sind also a und b Primzahlen, und r irgend eine ganze Zahl, so ist nicht $aaa\ldots = bbb\ldots r$ (§. 147.), weil nicht $b = a$ ist.

Ist b eine Primzahl und a aus den Primzahlen c, d, e etc. zusammengesetzt, so ist nicht $cde\ldots cde\ldots cde\ldots = bbb\ldots r$ (§. 147.), weil b keiner von den Zahlen c, d, e, etc. gleich ist. Z. B. es wäre $\frac{a}{b} = \frac{30}{31}$, so sind die Zahlen c, d, e, wor-

aus

aus a zusammengesetzt ist, 2 . 3 . 5, und es ist nicht $2.3.5 \ldots 2.3.5 \ldots 2.3.5 \ldots = 31.31.31 \ldots r$, so daß, wenn es wäre, alsdenn $\frac{2.3.5\ldots}{31.} \frac{2.3.5\ldots}{31.} \frac{2.3.5\ldots}{31.}$ der ganzen Zahl r gleichgesetzt werden könnte.

Ist a eine Primzahl, und b aus den Primzahlen f, g, etc. zusammengesetzt, so ist nicht $aaa\ldots = fg\ldots fg\ldots fg\ldots r$ (§. 147.), weil keine von den Zahlen f, g, etc. = a ist. Z. B. es wäre $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$ oder $\frac{5}{2.3}$, wo $f = 2$ und $g = 3$, und weder 2 noch $3 = 5$, so wird auch nicht $5.5.5\ldots = 2.3\ldots 2.3\ldots 2.3\ldots r$ seyn, so daß $\frac{5 \;.\; 5 \;.\; 5}{2.3\ldots 2.3\ldots 2.3\ldots} = r$ gesetzt werden könnte.

Ist endlich a aus den Primzahlen c, d etc. und b aus den Primzahlen f, g etc. zusammengesetzt, so ist nicht $cd\ldots cd\ldots cd\ldots fg\ldots fg\ldots fg\ldots r$ (§. 147.), weil keine von den Zahlen f, g etc. einer von den Zahlen c, d etc. gleich ist.

Also ist in keinem Falle $aaa = bbb\ldots r$, d. i. es ist nicht $a^n = b^n r$, folglich nicht $\frac{a^n}{b^n} = r$, als welches entstünde, wenn man auf beiden Seiten mit b^n dividirte; es ist also nicht $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$ einer ganzen Zahl (§. 257.).

Im zweyten Fall aber, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ noch nicht durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt ist,

bringe

bringe man ihn zur kleinsten Benennung, so daß $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ sey (§. 187.), alsdenn ist $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{p}{q}\right)^n$ (§. 261.), also kann $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ hier gleichfalls keine ganze Zahl r seyn, weil sonst $\left(\frac{p}{q}\right)^n$ ebenfalls eine ganze Zahl r seyn müßte, welches, nach dem eben gegebnen Beweise, unmöglich ist. Z. B. $(\frac{6}{8})^3$ kann keine ganze Zahl seyn, weil $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, und $(\frac{3}{4})^3$ keine ganze Zahl seyn kann.

§. 266.

Zus. Wenn also die Wurzel einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist, so ist sie auch kein Bruch von einem endlichen Zähler und Nenner. Da sie nun gleichwohl ein Bruch seyn muß, so ist sie ein Bruch, dessen Zähler und Nenner unendlich seyn muß, d. i. ein Bruch, der sich zwar niemals ganz genau, aber doch, als ein Decimalbruch betrachtet, immer genauer bestimmen läßt, je größer man den Nenner annimmt. Also ist in diesem Falle die Wurzel eine Irrationalzahl (§. 55.).

§. 267. Vollkommne und unvollkommne Quadrat- und Cubikzahl, Potenz.

Erklär. Eine ganze Zahl, deren Quadratwurzel gleichfalls eine ganze Zahl ist, heißt eine vollkommene Quadratzahl; eine ganze Zahl, deren Cubikwurzel auch eine ganze Zahl ist, heißt eine vollkommene Cubikzahl, und überhaupt eine ganze Zahl, deren nte Wurzel gleichfalls eine ganze Zahl ist, heißt eine vollkommene nte Potenz. Eine ganze Zahl hin-

hingegen, deren Quadratwurzel nicht eine ganze Zahl ist, heißt eine unvollkommene Quadratzahl; eine ganze Zahl, deren Cubikwurzel nicht eine ganze Zahl ist, heißt eine unvollkommene Cubikzahl, und überhaupt eine ganze Zahl, deren nte Wurzel nicht eine ganze Zahl ist, heißt eine unvollkommene nte Potenz. Z. B. 1, 4, 9, 16 etc. sind vollkommene, aber 2, 3, 5, 6, 7, 8 etc. unvollkommene Quadratzahlen; ferner sind 1, 8, 27 etc. vollkommene, aber 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 etc. unvollkommene Cubikzahlen.

§. 268.

Zus. Also sind die Wurzeln der unvollkommenen Quadrat- und Cubikzahlen, und überhaupt aller unvollkommenen Potenzen, insgesammt Irrationalzahlen (§. 266.).

§. 269. Natur des Quadrats einer zweytheiligen Wurzel.

Lehrsatz. Das Quadrat der Summe zweyer Zahlen a + b besteht aus dem Quadrat der ersten Zahl, dem Product aus dem Duplo der ersten Zahl in die zweyte, und dem Quadrat der zweyten Zahl.

Beweis. Man bekommt das Quadrat von a + b, wenn man a + b durch a + b multiplicirt (§. 254.).

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad\; +ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \text{oder:} \qquad \begin{array}{l} 3+2 \\ \underline{3+2} \\ 3^2+3\cdot2 \\ \underline{\quad\; +3\cdot2+2^2} \\ 3^2+2\cdot3\cdot2+2^2 \end{array}$$

§. 270.

Lehrs. Das Quadrat einer ganzen Zahl, die zwey oder mehrere Ziffern enthält, läßt sich aus ihren bloßen Ziffern zusammensetzen, nämlich wenn man zum Quadrat der ersten höchsten Ziffer das Product aus ihrem Duplo in die zweyte Ziffer, und das Quadrat der zweyten Ziffer hinzusetzt, aber so, daß man mit den Einern zur Rechten hin immer um eine Stelle ausrückt, so hat man das Quadrat der beiden ersten höchsten Ziffern. Setzt man zu diesem eben so das Product aus dem Duplo der beiden ersten Ziffern in die dritte, und das Quadrat der dritten Ziffer, so hat man das Quadrat der drey ersten höchsten Ziffern. Setzt man zu diesem wieder eben so das Product aus dem Duplo der drey ersten Ziffern in die vierte, und das Quadrat der vierten Ziffer, so hat man das Quadrat der vier ersten Ziffern; und eben so verfährt man, wenn die Zahl aus 5, 6 und mehrern Ziffern besteht. Z. B.

```
73² = 49..          oder: 736² = 49....
       42.                         42...
         9                          9..
      ----                        876.
      5329                          36
                                ------
                                541696
```

```
oder: 7364² = 49......
               42.....
                9....
               876...
                 36..
                5888.
                   16
             --------
             54228496
```

Beweis. Jede Zahl von mehr als einer Ziffer läßt sich in solche zwey Theile theilen, daß der eine ihre Einer, und der andere alle ihre Zehner enthält (§. 58.). Z. B. $73 = 70 + 3$; $736 = 730 + 6$; $7364 = 7360 + 4$. Nun besteht das Quadrat von $70 + 3$, nach §. 269.,

erstlich aus 4900, dem Quadrat von 70;
zweytens aus 420, dem Product aus dem Duplo von 70 in 3;
drittens aus 9, dem Quadrat von 3.

Läßt man also die Nullen hinweg, so hat man, wie oben,

49..
42.
9

Eben so enthält das Quadrat von $730 + 6$

erstlich 49..
42.
900, als das Quadrat von 730 (§. 256.);
zweytens 8760, das Product aus dem Duplo von 730 in 6;
drittens 36, das Quadrat von 6 (§. 269.).

Läßt man also wieder die Nullen hinweg, so hat man, wie oben,

49..
42.
9..
876.
36

Auf eben die Art erhellet die Richtigkeit des Satzes, wenn die Zahl aus 4, 5 und mehrern Ziffern besteht.

§. 271.

Zus. Also giebt außer der ersten höchsten Ziffer der Wurzel jede der übrigen im Quadrat zwey neue Zifferstellen, deren erstere die Einer vom Producte der Ziffer in das Duplum aller vorhergehenden, die andere aber die Einer ihres Quadrats enthält. Wenn man daher eine gegebene Quadratzahl von der Rechten zur Linken in Classen theilt, und jeder Classe zwey Zifferstellen giebt, (die letzte ausgenommen, für welche auch nur Eine Ziffer übrig bleiben kann); so enthält ihre Quadratwurzel so viel Ziffern, als Classen sind, und zwar steckt, wenn man jetzt rückwärts von der Linken zur Rechten geht, in der ersten Classe das Quadrat der ersten höchsten Ziffer der Wurzel; in den beiden ersten Classen das Quadrat der beiden ersten Wurzelziffern; in den drey ersten Classen das Quadrat der drey ersten Wurzelziffern u. s. w. Z. B. das Quadrat von 7364 ist:

49	..		
4	2.		
	9	..	
	87	6.	
		36	..
	5	88	8.
			16
54	22	84	96

Hier sind 4 Classen, also enthält die Quadratwurzel 4 Ziffern: 7, 3, 6, 4. In der ersten Classe 54 steckt das Quadrat 49 von 7. In der Zahl 5422 der beiden ersten Classen steckt das Quadrat 5329 von 73 u. s. w.

§. 272. Ausziehung der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl.

Aufgabe. Aus einer gegebnen ganzen Zahl die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflös. 1) Man theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, und gebe jeder Classe 2 Ziffern, bis für die letzte Classe zwey, oder eine Ziffer bleibt; so hat die Wurzel so viel Ziffern, als Classen sind (§. 271.).

2) Man suche im Quadrattäfelchen (§. 255.) das Quadrat, welches zunächst kleiner als die Zahl der ersten Classe von der Linken gezählt, oder ihr gleich ist; so ist die dazu gehörige Wurzel die erste Ziffer der verlangten Quadratwurzel.

3) Man ziehe nun das gedachte Quadrat von der Zahl der ersten Classe ab, rücke zur Differenz die Ziffern der zweyten Classe hinzu, duplire die gefundene erste Wurzelziffer, setze dieses Duplum in eine Parenthese, so daß die Einer desselben unter die erste Ziffer der zweyten Classe zu stehen kommen, dividire durch dasselbe die Zahlen, die über ihm stehen, und nehme den Quotienten zur zweyten Ziffer der verlangten Quadratwurzel an. Alsdenn multiplicire man ihn durch den Divisor, und setze das Product so unter, daß seine Einer unter die erste Ziffer der zweyten Classe kommen, ferner setze man das Quadrat der zweyten Ziffer so, daß die Einer unter die zweyte Ziffer der zweyten Classe kommen, und addire beide Producte. Ist nun ihre Summe größer, als die über ihr stehenden Zahlen, so ist die zweyte Ziffer der Wurzel zu groß angenommen. Ist aber die Summe nicht größer, so ist der gefundene Quotient wirklich die zweyte Ziffer der verlangten Quadratwurzel.

 4) Man

4) Man subtrahire daher gedachte Summe von den über ihr stehenden Zahlen, rücke zur Differenz die Ziffern der dritten Classe, nehme das Duplum der beiden ersten gefundenen Ziffern, dessen Einer unter die erste Ziffer der dritten Classe kommen, wieder zum Divisor, dividire durch ihn die Zahlen, die über ihm stehen, und nehme den Quotienten zur dritten Ziffer der verlangten Quadratwurzel an. Alsdann multiplicire man ihn durch den Divisor, setze das Product so unter, daß die Einer unter die erste Ziffer der dritten Classe kommen, ferner setze man das Quadrat der gefundenen dritten Ziffer so unter, daß die Einer unter die zweyte Ziffer der dritten Classe kommen, und addire beide Producte. Ist nun ihre Summe größer, als die über ihr stehenden Zahlen, so ist die dritte Ziffer der Wurzel zu groß angenommen. Ist aber die Summe nicht größer, so ist der gefundene Quotient wirklich die dritte Ziffer der verlangten Wurzel.

5) Zieht man nun die erwähnte Summe von den Zahlen über ihr ab, und verfährt mit den folgenden Classen auf eben die Art, wie Nr. 3. und 4., so bekommt man alle Ziffern der verlangten Quadratwurzel.

6) Bleibt am Ende kein Rest, so ist die gegebne Zahl ein vollkommnes Quadrat, und man hat also die Wurzel von ihr genau. Bleibt aber ein Rest, so ist die gegebne Zahl ein unvollkommnes Quadrat, folglich ihre Wurzel eine Irrationalzahl (§. 268.), und es muß also zur gefundenen ganzen Zahl noch ein Bruch kommen, dessen Zähler und Nenner unendlich ist.

Z. B. wenn man aus 54 22 84 96, oder aus 159624 die Quadratwurzel ausziehen soll, so verfährt man also:

```
5'4 | 2 2 | 8 4 | 9 6 | 7 3 6 4.
4 9
  5'| 2'2
 (1 | 4)
  4 | 2 .
    |   9
  4 | 2 9
    | 9'3'| 8'4
    |(1 4 | 6)
    | 8 7 | 6 .
    |     | 3 6
    | 8 7 | 9 6
    |   5 8 8 | 9 6
    | (1 4 7  | 2)
    |   5 8 8 | 8 .
    |         | 1 6
    |   5 8 8 | 9 6
    |             0

oder:  1 5 | 9 6 | 2 4 | 3 9 9
         9 |
         6 | 9 6
         ( | 6)
         5 | 4
           | 8 1
         6 | 2 1
           | 7 5 | 2 4
           |  (7 | 8)
           | 7 0 | 2
           |     | 8 1
           | 7 1 | 0 1
           |   4 | 2 3
```

Beweis. Die Zahlen, die nach und nach von der gegebenen Zahl 54 22 84 96 subtrahirt worden sind, machen zusammen das Quadrat der gefundenen Zahl 7364 aus (§. 270.). Nun ist, vermöge der Vorschrift, nicht mehr subtrahirt worden, als die gegebne Zahl beträgt; folglich ist das Quadrat von 7364 nicht größer, als die gegebne Zahl, folglich ihr entweder gleich, oder kleiner als sie (§. 12.). Im erstern Fall bleibt am Ende kein Rest (§. 40.), und die gefundene Zahl 7364 ist ganz genau die verlangte Quadratwurzel (§. 263.). Im zweyten Fall bleibt am Ende ein Rest, wie im zweyten Exempel (§. 28.), und die gefundene Zahl 399 ist kleiner, als die verlangte Quadratwurzel von 159624 (§. 264.), allein sie differirt von dieser nicht mehr um 1; denn da die Zahl der ersten Classe nur höchstens aus 2 Ziffern besteht (vermöge der Vorschrift), folglich kleiner als das Quadrat von 10 ist, so besteht die Wurzel desjenigen Quadrats, das zunächst kleiner, als die Zahl der ersten Classe, oder ihr gleich ist, aus einer einzigen Ziffer. Nun ist diese, nach der Vorschrift, die erste gefundene Ziffer. Wollte man also letztere auch nur um 1 vermehren, so würde ihr Quadrat schon größer seyn, als die Zahl der ersten Classe, also größer als die gegebne Zahl, folglich wäre, wenn man die erste gefundene Ziffer 3 nur um 1 vermehrte, dieselbe schon größer, als die verlangte Quadratwurzel, also kann die erste Ziffer 3 nicht um 1 kleiner seyn, als die erste Ziffer der verlangten Quadratwurzel. Eben so wenig findet dieses bey der zweyten gefundenen Ziffer statt. Denn da keine Ziffer über 9 geht (§. 58), so ist die zweyte gefundene Ziffer entweder 9, oder kleiner als 9. Ist sie kleiner als 9, so kann sie nicht um 1 kleiner seyn, als die zweyte Ziffer der verlangten Quadratwurzel, denn sonst hätte man, der Vorschrift zuwider, nicht gehörig dividirt, sondern den Quotienten zu klein angenommen. Ist sie aber

aber 9, so kann sie gleichfalls nicht um 1 kleiner seyn, als die zweyte Ziffer der verlangten Quadratwurzel, denn wollte man statt ihrer 10 oder noch mehr annehmen, so würde dadurch die erste Ziffer 3 um 1 vermehrt, welches nach dem vorhin erwiesenen nicht stattfindet. Auf gleiche Art ist klar, daß auch nicht die 3te, 4te, 5te, und überhaupt keine der gefundenen Ziffern von den Ziffern der verlangten Quadratwurzel um 1 differiren kann. Also ist in dem Falle, da ein Rest bleibt, die gefundene Zahl zwar nicht genau die verlangte Quadratwurzel, aber sie ist nicht mehr um 1 kleiner, als diese, folglich ist in diesem Falle die Quadratwurzel keine ganze Zahl, mithin eine Irrationalzahl (§. 268.), also fehlt zu der gefundenen Zahl noch ein ächter Bruch (§. 153.) von unendlichem Zähler und Nenner.

§. 273.

Zus. Anstatt jedes Product aus dem Duplo der gefundenen Ziffer in die vorhergehenden mit ihrem Quadrat erst zusammen zu addiren, kann man beym Divisor die Parenthese weglassen, und ihm die gefundene Ziffer sogleich beyfügen, alsdenn die Parenthese machen, und sie durch die gefundene Ziffer auf einmal multipliciren. Z. B.

5·4	2 2	8 4	9 6	7 3 6 4
4 9				
5·	2·2			
(1	4 3)			
4	2 9			
	9·3·	8·4		
	(1 4	6 6)		
	8 7	9 6		
		5 8 8	9 6	
		(1 4 7	2 4)	
		5 8 8	9 6	
		0		

§. 274. Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Decimalbruche.

Aufg. Aus einem gegebenen Decimalbruche die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflös. Man hänge ihm zur Rechten so viel Nullen an, als man will, doch so, daß die Zahl der Decimalstellen gerade wird, und ziehe alsdenn aus ihm die Quadratwurzel, wie aus einer ganzen Zahl (§. 272.), so hat diese so viel Decimalziffern, als die mit Nullen vermehrten Decimalstellen Classen geben.

Z. B. es sey aus 13, 7, oder aus 0, 0021 die Quadratwurzel auszuziehen, so verfährt man also:

```
13, | 70   | 00  | 00 | 3,701
 9  |
----|------
 4  | 7·0
    |(67)
 4  | 69
------------------------
    1·| 0·0·| 0·0
      | 7 4 | 0 1
      ------------
      | 2 5   9 9
```

```
oder: 0, | 00 | 2·1 | 00   | 00  | 0,0458
         |    | 16  |
         |----|-----|------
         |    |  5· | 0·0
         |    |     |(85)
         |    |  4  | 25
         |    |-----|------
         |    |     | 75·  | 0·0
         |    |     |  (9  | 08)
         |    |     | 72   | 64
                    ------------
                       2     36
```

Beweis. Es ist $\sqrt{13,7} = \sqrt{13,700000}$ (§. 197.) $= \sqrt{\frac{13700000}{1000000}}$ (§. 196.) $= \frac{3701}{1000}$ (§. 258.) $= 3,701$ (§. 196.).

§. 275.

Zus. Wenn man also die Quadratwurzel bequem aus einem Bruche ausziehen will, so darf man ihn nur erst in einen Decimalbruch verwandeln (§. 203.).

Z. B. da $\frac{5}{7} = 0,714285714285\ldots$ ist, so ist $\sqrt{\frac{5}{7}} = 0,845154\ldots$

§. 276. Ausziehung der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl, die kein vollkommnes Quadrat ist.

Aufgabe. Aus einer ganzen Zahl, die kein vollkommnes Quadrat ist, die Quadratwurzel so genau zu finden, als man will.

Auflös. Man hänge ihr so viel Paare Nullen an, als man Decimalziffern für die Quadratwurzel verlangt. Z. B. man soll die Quadratwurzel von 2 durch Näherung finden:

```
2 | 1,4 1 4 2 1 3 ...
1 |
-----------
1·| 0·0
 (2 4)
  9 6
-----------
   4·| 0·0
   2 | 8 1
-----------------
   1  1 9·| 0·0
     (2 8 | 2 4)
   1  1 2 | 9 6
-----------------------
       6· 0·4·| 0·0
     (2  8  2 | 8 2)
      5  6  5 | 6 4
---------------------------
          3 8  3·6·| 0·0
          2 8  2 8 | 4 1
-------------------------------
          1·0· 0·7  5 9·| 0·0
         (2  8  2  8  4 | 2 3)
           8  4  8  5  2 | 6 9
-----------------------------------
           1   5 9  0 6   3 1
                      u. s. w.
```

Beweis. Weil 2 = 2,000000000000 (§. 197.), so ist $\sqrt{2} = 1,414213$ (§. 274.).

§. 277. Bestandtheile des Cubus aus der Summe zweyer Zahlen.

Lehrsatz. Der Cubus der Summe zweyer Zahlen besteht aus dem Cubo der ersten Zahl, aus dem Product des dreyfachen Quadrats der ersten Zahl in die zweyte, aus dem Product des dreyfachen Qua-

drats

drats der zweyten Zahl in die erste, und aus dem Cubo der zweyten Zahl.

Beweis. Man bekommt nemlich den Cubum von $a+b$, wenn man $a+b$ durch ihr Quadrat $a^2+2ab+b^2$ (§. 269.) multiplicirt (§. 254.).

$$\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad + \; a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline \end{array}$$

Also ist der Cubus $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (§. 247.).

Oder:
$$\begin{array}{l} 3^2+2.3.2+2^2 \\ 3+2 \\ \hline 3^3+2.3^2.2+3.2^2 \\ \quad\quad 3^2\;\,2+2.3\;\,2^2+2^3 \\ \hline 3^3+2.3^2.2+3.3.2^2+2^3 \end{array}$$

§. 278.

Lehrsatz. Der Cubus einer ganzen Zahl, die aus zwey oder mehrern Ziffern besteht, läßt sich aus ihren bloßen Ziffern zusammensetzen; nämlich wenn man zum Cubo der ersten höchsten Ziffer erstlich das Product ihres dreyfachen Quadrats in die zweyte Ziffer, dann das Product des dreyfachen Quadrats der zweyten Ziffer in die erste, und endlich den Cubum der zweyten Ziffer hinzusetzt, aber so, daß man mit den Einern zur Rechten hin immer um eine Stelle ausrückt, so hat man den Cubum der beiden ersten Ziffern. Setzt man zu diesem eben so das Product des dreyfachen Quadrats der beiden ersten Ziffern in die dritte, ferner das Product des dreyfachen Quadrats der dritten Ziffer in die beiden ersten, und endlich den Cubum der dritten Ziffer, so hat man den Cubum

Cubum der drey ersten Ziffern. Und eben so verfährt man, wenn die Zahl aus 4, 5 und mehrern Ziffern besteht. Z. B.

$27^3 =$	8...	oder: $276^3 =$	8...
	84..		84..
	294.		294.
	343		343...
	19683		13122..
			2916.
			216
			21024576

Beweis. Es ist $27 = 20 + 7$, und $276 = 270 + 6$ (§. 58.). Nun besteht der Cubus von $20 + 7$

1) aus 8000, dem Cubo von 20;
2) aus 8400, dem Product des dreyfachen Quadrats von 20 in 7;
3) aus 2940, dem Product des dreyfachen Quadrats von 7 in 20;
4) aus 343, dem Cubo von 7 (§. 277.).

Läßt man also die Nullen hinweg, und bemerkt dafür ihre Stellen, so hat man, wie oben, 8...
84..
294.
343

Eben so enthält der Cubus von $270 + 6$

1) 8...
84..
294.
343000 } den Cubum von 270 (§. 256.);

2) 1312200, das Product des dreyfachen Quadrats von 270 in 6;
3) 29160, das Product des dreyfachen Quadrats von 6 in 270;
4) 216, den Cubum von 6 (§. 277.).

Läßt

Läßt man also wieder die Nullen hinweg, so hat man, wie oben,

```
8...
84..
294.
 343...
13122..
  2916.
   216
```

Auf gleiche Art ist die Richtigkeit des Satzes klar, wenn die Zahl aus 4, 5 oder mehrern Ziffern besteht.

§. 279.

Zus. Also giebt außer der ersten höchsten Ziffer der Wurzel eine jede der übrigen im Cubo drey neue Zifferstellen, deren erste die Einer vom Product der Ziffer in das dreyfache Quadrat aller vorhergehenden, die zweyte die Einer vom Product des dreyfachen Quadrats der Ziffer in alle vorhergehenden, und die dritte die Einer vom Cubo der Ziffer enthält. Wenn man daher eine gegebne Cubikzahl von der Rechten zur Linken in Classen theilt, und jeder Classe 3 Zifferstellen giebt, (die letzte ausgenommen, welche eine, zwey oder drey Ziffern enthalten kann, je nachdem der Cubus der höchsten Wurzelziffer 1, 2 oder 3 Ziffern enthält); so hat ihre Cubikwurzel so viel Ziffern, als Classen sind, und zwar steckt, wenn man jetzt rückwärts von der Linken zur Rechten geht, in der ersten Classe der Cubus der ersten höchsten Ziffer; in der Zahl der beiden ersten Classen der Cubus der zwey ersten Wurzelziffern, in der Zahl der 3 ersten Classen der Cubus der 3 ersten Wurzelziffern u. s. w.

§. 280. Ausziehung der Cubikwurzel aus einer ganzen Zahl.

Aufgabe. Aus einer gegebnen ganzen Zahl die Cubikwurzel auszuziehen.

Auflös. 1) Man theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, und gebe jeder Classe 3 Ziffern, bis für die letzte Classe 3, 2, oder auch nur eine Ziffer übrig bleibt, so hat die Wurzel so viel Ziffern, als Classen sind (§. 279.).

2) Man suche im Cubiktäfelchen (§. 255.) den Cubum, welcher der Zahl in der ersten Classe, von der Linken gezählt, gleich, oder zunächst kleiner ist als sie, so ist die dazu gehörige Wurzel die erste Ziffer der Cubikwurzel.

3) Man ziehe nun diesen Cubum von der Zahl der ersten Classe ab, rücke zur Differenz die Ziffern der zweyten Classe, setze das dreyfache Quadrat der ersten gefundenen Ziffer in einer Parenthese so unter, daß die Einer unter die erste Ziffer der zweyten Classe kommen, dividire durch dasselbe die Zahlen, die über ihm stehen, und nehme den Quotienten zur zweyten Ziffer der verlangten Cubikwurzel an. Alsdann multiplicire man ihn durch den Divisor, setze das Product so unter, daß seine Einer unter die erste Ziffer der zweyten Classe kommen, unter dieses setze man das Product aus dem dreyfachen Quadrat der zweyten gefundenen Ziffer in die erste, und den Cubum der zweyten Ziffer, so daß die Einer von jenem unter die zweyte, und von diesem unter die dritte Ziffer der zweyten Classe kommen, und addire die 3 Producte. Ist nun ihre Summe größer, als die über ihr stehenden Zahlen, so ist die zweyte Ziffer der Wurzel zu groß angenommen. Ist aber die Summe nicht größer, so ist der gefundene Quotient wirklich die zweyte Ziffer der verlangten Wurzel.

4) Alsdann ziehe man die gedachte Summe von den über ihr stehenden Zahlen ab, rücke zur Differenz die Ziffern der dritten Classe, nehme das dreyfache Quadrat der beiden ersten Ziffern, dessen Einer unter die erste Ziffer der dritten Classe kommen, wieder zum Divisor, dividire durch ihn die Zahlen, die über ihm stehen, und nehme den Quotienten zur dritten Ziffer der verlangten Cubikwurzel an. Hierauf multiplicire man sie wieder durch den Divisor, setze zu diesem Product das Product aus dem dreyfachen Quadrat der dritten Ziffer in die beiden ersten und den Cubum der dritten Ziffer, aber so, daß wieder die Einer vom ersten Product unter die erste, die vom zweyten unter die zweyte, und die vom Cubo unter die dritte Ziffer der dritten Classe kommen, und addire diese 3 Producte. Ist nun ihre Summe größer, als die über ihr stehenden Zahlen, so ist die dritte Ziffer der Wurzel zu groß angenommen. Ist aber die Summe nicht größer, so ist die gefundene Ziffer wirklich die dritte Ziffer der verlangten Wurzel.

5) Zieht man nun die gedachte Summe von den über ihr stehenden Zahlen ab, und verfährt mit der folgenden Classe eben so, wie Nr. 4., so bekommt man die 4te Ziffer der Wurzel, und auf eben die Art auch die 5te, 6te etc., also alle Ziffern der Cubikwurzel überhaupt.

6) Bleibt am Ende kein Rest, so hat man die verlangte Cubikwurzel ganz genau, und die gegebene Zahl ist also in diesem Fall ein vollkommner Cubus. Bleibt aber ein Rest, so ist die gegebne Zahl kein vollkommner Cubus, mithin ist ihre Cubikwurzel eine Irrationalzahl, und es fehlt also zur gefundenen ganzen Zahl noch ein ächter Bruch von unendlichem Zähler und Nenner.

Z. B. wenn man aus 21024576, oder aus 63756124 die Cubikwurzel ausziehen soll, so verfährt man also:

	2·1	0 2 4	5 7 6	2 7 6
	8			
	1 3·	0·2 4		
	(1	2)		
	8	4		
	2	9 4		
		3 4 3		
	1 1	6 8 3		
		1 3 4 1	5 7 6	
		(2 1 8	7)	
		1 3 1 2	2	
		2 9	1 6	
			2 1 6	
		1 3 4 1	5 7 6	
			0	
oder:	6·3	7 5 6	1 2 4	3 9 9
	2 7			
	3 6	7 5·6		
	(2	7)		
	2 4	3		
	7	2 9		
		7 2 9		
	3 2	3 1 9		
		4 4 3 7·	1·2·4	
		(4 5 6	3)	
		4 1 0 6	7	
		9 4	7 7	
			7 2 9	
		4 2 0 2	1 9 9	
		2 3 4	9 2 5	

Be=

Beweis. Die Zahlen, die nach und nach von der gegebnen Zahl abgezogen sind, machen zusammen den Cubum der gefundenen 276 aus (§. 278.). Nun ist, zufolge der Vorschrift, nicht mehr abgezogen, als die gegebne Zahl beträgt, folglich ist der Cubus der gefundenen Zahl nicht größer, als die gegebene, also entweder ihr gleich, oder kleiner als diese (§. 18.). Im erstern Fall bleibt am Ende kein Rest (§. 40.), und die gefundene Zahl 276 ist ganz genau die verlangte Cubikwurzel (§. 263.). Im zweyten bleibt am Ende ein Rest (§. 28.), wie im zweyten Exempel, und die gefundene Zahl 399 ist kleiner, als die verlangte Cubikwurzel (§. 264.), allein sie ist von ihr nicht mehr um 1 unterschieden; denn da die Zahl der ersten Classe nur höchstens aus 3 Ziffern besteht (vermöge der Vorschrift), folglich kleiner als der Cubus von 10 ist, so besteht die Wurzel desjenigen Cubi, der zunächst kleiner als die Zahl der ersten Classe, oder ihr gleich ist, aus einer einzigen Ziffer. Nun ist diese die erste gefundene Ziffer (vermöge der Vorschrift). Wollte man also diese auch nur um 1 vermehren, so wäre ihr Cubus größer, als die Zahl der ersten Classe, folglich schon größer, als die ganze gegebne Zahl 63756124, also sie selbst schon größer, als die verlangte Cubikwurzel (§. 264.), mithin kann die erste gefundene Ziffer, wie hier 3, nicht um 1 kleiner seyn, als die erste Ziffer der verlangten Cubikwurzel. Eben so wenig findet dieses bey der zweyten gefundenen Ziffer statt. Denn da keine Ziffer über 9 geht (§. 58.), so ist die zweyte gefundene Ziffer entweder 9, oder kleiner als 9; ist sie kleiner als 9, so kann sie nicht um 1 kleiner seyn, als die zweyte Ziffer der verlangten Cubikwurzel, denn sonst hätte man, der Vorschrift zuwider, nicht gehörig dividirt, sondern den Quotienten zu klein angenommen. Ist sie aber 9, so kann sie gleichfalls

nicht um 1 kleiner seyn, als die zweyte Ziffer der verlangten Cubikwurzel; denn, wollte man statt ihrer 10, oder noch mehr setzen, so würde dadurch die erste Ziffer 3 um 1 vermehrt, welches nach dem vorhin Erwiesenen nicht stattfindet. Auf gleiche Art ist klar, daß auch nicht die 3te, 4te, 5te, und überhaupt keine der gefundenen Ziffern von den Ziffern der verlangten Cubikwurzel um 1 differiren kann. Also ist in dem Fall, da ein Rest bleibt, die gefundene Zahl zwar nicht genau die verlangte Cubikwurzel, aber sie ist nicht mehr um 1 kleiner, als diese; folglich ist in diesem Fall die Cubikwurzel keine ganze Zahl, mithin eine Irrationalzahl (§. 268.), also fehlt zu der gefundenen ganzen Zahl noch ein ächter Bruch (§. 153.) von unendlichem Zähler und Nenner.

§. 281. Ausziehung der Cubikwurzel aus einem Decimalbruche.

Aufgabe. Aus einem gegebnen Decimalbruch die Cubikwurzel auszuziehen.

Auflös. Man hänge ihm zur Rechten so viel Nullen an, als man will, doch so, daß die Zahl der Decimalstellen durch 3 theilbar werde, und ziehe alsdenn aus ihm die Cubikwurzel, wie aus einer ganzen Zahl (§. 280.), so hat diese so viel Decimalziffern, als die Decimalstellen Classen geben.

Z. B. wenn aus 78,4 die Cubikwurzel ausgezogen werden soll, so verfährt man also:

```
 78,| 400 | 000 | 000 | 4,279...
 64 |     |     |     |
----|-----|     |     |
 14 | 4·0·0     |     |
 (4 | 8)  |     |     |
  9 | 6   |     |     |
    | 48  |     |     |
    |   8 |     |     |
----------|     |     |
 10   088 |     |     |
----------|-----|     |
  4·3·1·2·| 0·0·0     |
   (5 2 9 | 2)  |     |
  3 7 0 4 | 4   |     |
      6 1 | 7 4 |     |
          | 3 4 3     |
----------------|     |
  3 766   4 8 3 |     |
    5·4 5 5·1 7·| 0·0·0
    (5 4 6 9 8  | 7)
    4 9 2 2 8 8   3
        1 0 3 7   6 1
                  7 2 9
    -------------------
    4 9 3 3 2 6 6 3 9
    -------------------
      5 2 1 9 0 3 6 1
```

Beweis. Es ist die $\sqrt[3]{78,4} = \sqrt[3]{78,400000000}$ (§. 197.) $= \frac{78400000000}{1000000000}$ (§. 196.) $= \frac{4279}{1000}$ (§. 258.) $= 4,279\ldots$ (§. 196.).

§. 282.

Zus. Also kann man die Cubikwurzel bequem aus einem Bruche ausziehen, wenn man ihn vorher in einen Decimalbruch verwandelt (§. 203.).

§. 283. Ausziehung der Cubikwurzel aus einer ganzen Zahl, die kein völliger Cubus ist.

Aufgabe. Aus einer ganzen Zahl, die kein vollkommener Cubus ist, die Cubikwurzel so genau auszuziehen, als man will.

Auflös. Man hänge so vielmal 3 Nullen an sie, als man Decimalstellen für die Wurzel verlangt. Z. B. man soll die Cubikwurzel von 2 finden.

```
 2 | 1,2 5 9 . . .
 1 |
---  ---------
 1'| 0'0'0 |
 ( | 3)    |
   | 6     |
   | 1 2   |
   |     8 |
   -------
   | 7 2'8 |
   -------
   | 2 7'2'| 0'0'0 |
   |  (4 3 | 2)    |
   | 2 1 6 | 0     |
   |     9 | 0 0   |
   |       | 1 2 5 |
  ---------------
   | 2 2 5   1 2 5 |
  ---------------
   |   4 6   8'7 5'| 0'0'0 |
   |    (4   6 8 7 | 5)    |
   |   4 2   1 8 7 | 5     |
   |         3 9 3 | 7 5   |
   |               | 7 2 9 |
     -------------   -----
   |   4 2   4 9 1 | 9 7 9 |
     -------------   -----
   |     4   3 8 3 | 0 2 1 |
```

Beweis. Weil 2 = 2,000000000 (§. 197.); so ist $\sqrt[3]{2}$ = 1,259 . . . (§. 281.).

§. 284. Multiplication der Potenzen von einerley Wurzel.

Aufgabe. Potenzen von einerley Wurzel durch einander zu multipliciren.

Auflös. Man addire blos ihre Exponenten, d. i. $a^m \times a^n = a^{m+n}$, z. B. $4^3 \times 4^2 = 4^5$, oder: $64 \times 16 = 1024 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$.

Beweis. Der Exponent einer jeden Potenz ist die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal die Wurzel als Factor gesetzt werden muß (§. 249.), folglich enthält das Product $a^m \times a^n$ die Wurzel a so vielmal als Factor, als die Exponenten m und n zusammen betragen, also ist dasselbe eine Potenz von a, deren Exponent die Summe der gegebnen Exponenten ist (§. 249.), z. B. $a^2 \times a^3 = aa \,.\, aaa = a^5$.

§. 285. Division der Potenzen von einerley Wurzel.

Aufgabe. Potenzen von einerley Wurzel durch einander zu dividiren.

Auflös. Man subtrahire blos den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividends, d. i. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, z. B. $\frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3$ oder $\frac{1024}{16} = 64$.

Beweis. Es ist $a^m = a^{m-n+n}$ (§. 40.) $= a^{m-n} \times a^n$ (§. 284.), also $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (§. 87.), z. B. $\frac{a^5}{a^3} = a^2$.

§. 286.

Zus. Also ist $a = a^1$, d. i. man kann jede Zahl a als die erste Potenz von ihr ausdrücken. Denn

da $a^n = a \times a^{n-1}$ (§. 254.), so ist $\frac{a^n}{a^{n-1}} = a$ (§. 87.). Nun ist auch $\frac{a^n}{a^{n-1}} = a^{n-(n-1)} = a^{n-n+1}$ (§. 41.) $= a^1$ (§. 40.), also ist $a = a^1$ (§. 7.).

§. 287.

Zus. Ferner ist $1 = a^0$, d. i. man kann die Zahl 1 als die 0te Potenz von jeder beliebigen Zahl a ansehen. Denn da $\frac{a^n}{a^n} = 1$, und $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ (§. 40.), so ist $1 = a^0$ (§. 7.).

§. 288.

Zus. Endlich ist $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, d. i. man kann jeden Stammbruch, dessen Nenner a^n ist, als eine Potenz von a ansehen, welche die negative Zahl $-n$ zum Exponenten hat. Denn $\frac{1}{a^n} = \frac{1 . a^m}{a^n . a^m} = \frac{a^m}{a^n . a^m}$ (§. 163.) $= \frac{a^m}{a^{n+m}}$ (§. 284.) $= a^{m-(n+m)} = a^{m-n-m}$ (§. 41.) $= a^{-n}$ (§. 40.). Z. B. $\frac{1}{3^2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$. Es ist nemlich so viel, als ob man 1 oder 3^0 durch 3^2 dividiren sollte, wo der Quotient wieder 3 seyn muß, mit einem Exponenten, welcher herauskommt, wenn man den Exponenten des Divisors 2 vom Exponenten des Dividends 0 abzieht, d. i. -2 (§. 285.).

§. 289.

Anmerk. Diese drey Zusätze sind übrigens bloße Kunstsprache, weil im eigentlichen Sinne der Exponent

nent einer Potenz allemal größer als 1, und nicht nur eine ganze Zahl, sondern auch eine Zahl an sich, mithin weder positiv noch negativ ist (§. 252. 253.).

§. 290. Zahlenproducte zu verlangten Potenzen erheben.

Aufgabe. Ein Product von Zahlen zur nten Potenz zu erheben.

Auflös. Man erhebe jeden Factor zur nten Potenz, d. i. $(ab)^n = a^n b^n$. Z. B. $(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2$, oder $6^2 = 4 \times 9 = 36$.

Beweis. Wenn man ab zur nten Potenz erheben soll, so soll man ein Product finden, in welchem ab, n mal als Factor steht (§. 249.). Folglich steht darin sowohl a als b, als Factor n mal (§. 79.). Also ist dasselbe $= a^n b^n$ (§. 249.). Z. B. $(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = aaa \cdot bbb = a^3 \cdot b^3$.

§. 291. Potenzen aufs neue zu Potenzen erheben.

Aufgabe. Eine Potenz, deren Exponent m ist, zur nten Potenz zu erheben.

Auflös. Man multiplicire blos die Exponenten m und n durch einander, d. i. $(a^m)^n = a^{mn}$, z. B. wenn 4^3 zum Quadrat erhoben werden soll, so erhält man dieses, wenn man den Exponenten 3 mit dem quadratischen Exponenten 2 multiplicirt, nemlich 4^6.

Beweis. Es heißt nemlich a^m zur nten Potenz erheben, so viel, als den Factor a^m, n mal setzen, d. i. $(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots$ (§. 249.). Nun ist aber $a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots = a^{m+m+m+\ldots}$ (§. 284.). Also heißt a^m zur nten Potenz erheben, soviel, als dem a einen Exponenten geben, welcher aus der Multiplication von m durch n entsteht (§. 73.). Z. B. $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = a^6$.

§. 292.

Zus. Also ist $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, d. i. man kann jede nte Wurzel von a^m als eine Potenz von a betrachten, deren Exponent der Bruch $\frac{m}{n}$ ist. Z. B. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ etc.

Denn aus a^m die nte Wurzel ausziehen, heißt eine Zahl finden, die, zur nten Potenz erhoben, a^m giebt (§. 249.). Diese Zahl aber ist die Potenz $a^{\frac{m}{n}}$, weil $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{mn}{n}}$ (§. 291.) $= a^m$ (§. 88.), also ist $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Es sey $a = 8$, so ist $a^2 = 64$; und $\sqrt[3]{64} = 4 = \sqrt[3]{8^2} = 8^{\frac{2}{3}}$.

§. 293.

Anmerk. Von diesem Zusatze gilt aber eben das, was (§. 289) von den dortigen drey Zusätzen ist bemerkt worden. Indessen sind diese vier Sätze in der höhern Mathematik von ungemeinem Nutzen, indem man vermöge derselben nicht nur jede Zahl überhaupt, sondern auch jede Wurzel als eine Potenz behandeln kann.

§. 294.

Lehrsatz. Jede im eigentlichen Sinne genommene Potenz einer ganzen Zahl, die größer als 1 ist, ist größer, als ihr Exponent, d. i. wenn $r > 1$, so ist allemal $r^n > n$.

Beweis. Man setze, es sey für irgend einen Exponenten n, $r^n > n$, so ist $r^n \times r > n \times r$,

weil

weil $r^n \times r = n \times r$ seyn würde, wenn $r^n = n$ wäre (§. 71.). Es wird also $r^{n+1} > n \times r$ (§. 254.). Nun aber ist n entweder $= 2$, oder größer als 2 (§. 252.), und r gleichfalls, nach der Voraussetzung, folglich $n \times r = n + n + \ldots$, mithin $n \times r > n + 1$; also $r^{n+1} > n + 1$ (§. 19.). Ist daher der Satz: $r^n > n$, für irgend einen Exponenten n wahr, so ist er auch für den nächst größern $n + 1$ wahr. Nun aber ist $2^2 > 2$, folglich auch $2^3 > 3$; $2^4 > 4$ u. s. w., also überhaupt $2^n > n$, und wenn $r > 2$ ist, so ist um so mehr $r^2 > 2$, folglich auch $r^3 > 3$, $r^4 > 4$ etc., also überhaupt $r^n > n$.

§. 295.

Zus. Also ist von jeder ganzen Zahl r, die größer als 1 ist, eine Potenz möglich, die größer ist, als jede gegebne Zahl n, so groß diese auch seyn mag, denn $r^n > n$.

§. 296.

Zus. Also ist auch von jedem Stammbruch $\frac{1}{r}$ eine Potenz möglich, die kleiner ist, als jeder gegebne Bruch $\frac{1}{n}$, so klein dieser auch angenommen werden mag. Denn da $r^n > n$, so ist $\frac{1}{r^n} < \frac{1}{n}$ (§. 168.).

§. 297.

Lehrsatz. Wenn man den Exponenten der Potenz und der Wurzel durch einerley Zahl multiplicirt, so bleibt die Größe der Wurzel ungeändert, d. i. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$, z. B. $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3.2]{8^{2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{8^4} = 4$.

Be-

Beweis. Man setze $\sqrt[n]{a^m} = x$, so ist $a^m = x^n$ (§. 261.), folglich $(a^m)^r = (x^n)^r$ (§. 261.); folglich $a^{mr} = x^{nr}$ (§. 291.), mithin $\sqrt[nr]{a^{mr}} = x$ (§. 263.), also $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$.

§. 298. Wurzelgrößen von einerley, und von verschiedener Benennung.

Erklär. Jede Wurzel einer Größe a, wenn man sie durch das Wurzelzeichen ausdruckt, z. B. $\sqrt[n]{a}$, heißt eine Wurzelgröße. Wurzelgrößen heißen von einerley Benennung, wenn sie gleiche Exponenten haben, z. B. $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{5}$; von verschiedener Benennung, wenn sie ungleiche Exponenten haben, z. B. $\sqrt[3]{5}$ und $\sqrt[4]{5}$. Es sind deshalb auch die Wurzelgrößen allemal Zahlen (§. 250.).

§. 299.

Aufgabe. Wurzelgrößen unter einerley Benennung zu bringen, z. B. $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[r]{c^u}$, $\sqrt[v]{e^x}$.

Auflös. Man multiplicire den Exponenten einer jeden Potenz und ihrer Wurzel durch die Exponenten der andern Wurzeln, d. i. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nrv]{a^{mrv}}$; $\sqrt[r]{c^u} = \sqrt[nrv]{c^{unv}}$; $\sqrt[v]{e^x} = \sqrt[nrv]{e^{xnr}}$ (§. 297.).

Drückt man die Wurzelgrößen durch Potenzen aus, deren Exponenten Brüche sind (§. 292.), z. B. $a^{\frac{m}{n}}$, $c^{\frac{u}{r}}$, $e^{\frac{x}{v}}$, so darf man nur diese Brüche un-

ter

ter einerley Benennung bringen, und man bekommt

$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mrv}{nrv}}$; $c^{\frac{u}{r}} = c^{\frac{unv}{nrv}}$; $e^{\frac{x}{v}} = e^{\frac{xnr}{nrv}}$ (§. 163.).

§. 300. Multipliciren der Wurzelgrößen.

Aufgabe. Wurzelgrößen durch einander zu multipliciren.

Auflös. 1) Sind sie von einerley Benennung, so multiplicire man die Zahlen hinter den Wurzelzeichen durch einander, d. i. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. Z. B. $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

2) Sind sie von verschiedener Benennung, so bringe man sie vorher unter einerley Benennung (§. 299.), z. B. $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[6]{b^4} = \sqrt[6]{a^3 b^4}$.

Beweis. Es ist $(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{b})^n$ (§. 290.) $=$ ab (§. 249.), also $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (§. 249.).

§. 301.

Zus. Wenn daher unter den Factoren hinter dem Wurzelzeichen $\sqrt[n]{}$, Potenzen von eben dem Exponenten n befindlich sind, so kann man sie weglassen, und dafür ihre Wurzel vor das Wurzelzeichen setzen. Z. B. $\sqrt[n]{a^n x^m} = a\sqrt[n]{x^m}$; denn $\sqrt[n]{a^n x^m} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{x^m}$ (§. 300.) $= a\sqrt[n]{x^m}$ (§. 249.). Z. B. $\sqrt{32} = \sqrt{16 . 2} = \sqrt{4^2 . 2} = 4\sqrt{2}$.

§. 302. Dividiren der Wurzelgrößen.

Aufgabe. Wurzelgrößen durch einander zu dividiren.

Auflös. 1) Sind sie von einerley Benennung, so dividire man die Zahlen hinter den Wurzelzeichen durch einander; d. i. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Z. B. $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{16}{8}} = \sqrt{2}$.

2) Sind sie von verschiedener Benennung, so bringe man sie vorher zu einerley Benennung (§. 299.).

Z. B. $\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{12^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{12^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{144}{8}} = \sqrt[6]{18}$.

Beweis. Es ist $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b} \cdot b}$ (§. 300.) $= \sqrt[n]{a}$; also $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ (§. 87.).

§. 303. Erhebung der Wurzelgrößen zu Potenzen.

Aufgabe. Eine Wurzelgröße zur mten Potenz zu erheben.

Auflös. Man erhebe die Zahl hinter dem Wurzelzeichen zur mten Potenz, d. i. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$. Z. B. $\sqrt{4}$ zur 3ten Potenz erhoben, giebt $\sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$.

Be-

Beweis. Denn die $\sqrt[n]{a}$ zur mten Potenz erheben, heißt $\sqrt[n]{a}$ als Factor m mal setzen, d. i. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}\ldots$ (§. 249.) $= \sqrt[n]{aaa\ldots}$ (§. 300.) $= \sqrt[n]{a^m}$ (§. 249.). Z. B. $(\sqrt{a})^4 = \sqrt{a}.\sqrt{a}.\sqrt{a}.\sqrt{a} = \sqrt{aaaa} = \sqrt{a^4}$.

§. 304. Ausziehung der Wurzel aus Wurzelgrößen.

Aufgabe. Eine Wurzel aus einer Wurzelgröße auszuziehen.

Auflös. Man multiplicire die Exponenten der Wurzeln durch einander, d. i. $\sqrt[r]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[rn]{a}$. Z. B. $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Beweis. Man setze $\sqrt[r]{\sqrt[n]{a}} = x$, so ist $\sqrt[n]{a} = x^r$ (§. 261.), folglich $a = x^{nr}$ (§. 291.), also $\sqrt[nr]{a} = x$ (§. 263.).

§. 305. Gerade und ungerade Potenzen.

Erklär. Diejenigen Potenzen und Wurzeln, deren Exponent eine gerade Zahl 2n ist, kann man die geraden Potenzen und Wurzeln nennen, z. B. a^2, a^4, a^6; $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{a}$ u. s. w. Diejenigen hingegen, deren Exponent eine ungerade Zahl $2n + 1$ ist, die ungeraden Potenzen und Wurzeln; z. B. a^1, a^3, a^5; $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$ u. s. w.

§. 306.

§. 306.

Lehrsatz. Von einer Zahl an sich sind alle Potenzen Zahlen an sich; von einer positiven Wurzel sind alle Potenzen positiv, und von einer negativen sind alle gerade Potenzen gleichfalls positiv, die ungeraden aber alle negativ. Z. B. von $+2$ ist das Quadrat $+4$, der Cubus $+8$ u. s. w.; hingegen von -2 ist das Quadrat $+4$, und das Biquadrat $+16$; aber der Cubus -8; die 5te Potenz -32 u. s. w.

Beweis. Erstlich ist das Product von lauter gleichen Zahlen an sich, gleichfalls eine Zahl an sich (§. 223.); also jede Potenz einer Zahl an sich, gleichfalls eine Zahl an sich (§. 249.).

Zweytens ist $(+a)^n = +a \times +a \times +a \ldots$ (§. 249.) $= +a^n$ (§. 240.).

Drittens ist $(-a)^2 = -a \times -a = +a^2$ (§. 240.), folglich $(-a)^4 = (-a)^2 \times (-a)^2$ (§. 284.) $= +a^2 \times +a^2 = +a^4$ (§. 240.); $(-a)^6 = (-a)^4 \times (-a)^2$ (§. 284.) $= +a^4 \times +a^2 = +a^6$ (§. 240.) u. s. w., also überhaupt $(-a)^{2n} = +a^{2n}$.

Endlich ist $(-a)^{2n+1} = -a \times (-a)^{2n}$ (§. 254.) $= -a \times +a^{2n}$ (p. dem.) $= -a^{2n+1}$ (§. 240.).

§. 307.

Zus. Also sind die ungeraden Wurzeln einer positiven Zahl gleichfalls positiv, und einer negativen Zahl gleichfalls negativ, d. i. $\sqrt[2n+1]{+2a^{2n+1}} = +a$, und $\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a$. Z. B. $\sqrt[3]{+8} = +2$ und $\sqrt[3]{-8} = -2$.

§. 308.

§. 308.

Zus. Von einer positiven Zahl kann jede gerade Wurzel sowohl positiv als negativ seyn, d. i. es ist sowohl $\sqrt[2n]{+a^{2n}} = +a$, als $\sqrt[2n]{+a^{2n}} = -a$; z. B. von $+4$ ist die Quadratwurzel sowohl $+2$, als -2; von $+81$ ist die Biquadratwurzel sowohl $+3$, als -3.

§. 309. Mögliche und unmögliche, oder imaginäre Zahlen.

Zus. Von einer negativen Zahl ist keine gerade Wurzel, d. i. keine Quadrat- oder Biquadratwurzel, keine 6te, 8te etc. möglich; d. i. $\sqrt[2n]{-a}$ ist unmöglich oder imaginär. Denn da sowohl von einer positiven als negativen Wurzel jede gerade Potenz positiv ist, so kann die gerade Wurzel einer negativen Zahl weder positiv noch negativ seyn, z. B. die Quadratwurzel von -1 ist weder $+1$, noch -1, weil sowohl von $+1$ als -1 das Quadrat $+1$ ist; folglich müßte sie blos eine Zahl an sich seyn, z. B. 1. Dieses ist aber gleichfalls unmöglich, denn von einer Zahl an sich ist auch jede Potenz eine Zahl an sich, d. i. weder positiv noch negativ (§. 306.); also ist eine gerade Wurzel einer negativen Zahl unmöglich.

§. 310.

Anmerk. Die Ausdrücke von $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-16}$, und überhaupt $\sqrt[2n]{-a}$ bedeuten also eben so viel, als ein viereckigter Kreis. Indessen sind doch diese Ausdrücke in der höhern Mathematik von großem Nutzen, und man bedient sich dort derselben unter dem Namen der unmöglichen oder imaginären Zahlen.

§. 311. Quadrat- und Cubiktafeln.

Anmerk. *) Wenn man von allen Zahlen nach der Reihe die Quadrate und Cubos macht, so entstehen daraus Quadrat- und Cubiktafeln, in welchen man alsdann eine vorgegebne Zahl, welche die Grenzen dieser Tafeln nicht überschreitet, nur aufsuchen darf, um entweder ihre Wurzel, oder die ganze Zahl, welche der Wurzel am nächsten kommt, zu finden. Bey den zur Trigonometrie nöthigen Tafeln des Freyherrn v. Wolf gehen sie bis auf die Wurzel 1000, also ist das größte Quadrat daselbst eine Million, und der größte Cubus 100 Millionen. Eben so weit gehen sie auch in Lamberts Zusätzen zu den trigonometrischen Tafeln, und in den Schulzischen Tafeln. In J. Paul Buchners tabula radicum quadrator. et cubor. gehen sie bis auf die Wurzel 12000. Joh. Ludolfs Tetragonometria tabularia Jen. 1712. enthält nur die Quadrate aller Wurzeln bis auf 100000. Quadrate und Cubi der Wurzeln bis auf 10000 finden sich in Prestet Elem. des Math. Par. 1695. II. Vol. p. 444.

§. 311. b. Verfertigung und Gebrauch der Quadrat- und Cubiktafeln.

Anm. Ein Gebrauch dieser Tafeln ist, die ersten Ziffern der Irrationalwurzeln zu finden, wobey man bemerken muß, wie viel Decimalstellen die Potenzen bekommen. Z. B. man wollte die ersten Ziffern der Cubikwurzel von 7 suchen, so muß man unter den Cubis in der Tafel einen aufsuchen, wo 3, oder 6, oder 9 Ziffern nach der 7 folgen. In den Wolfischen Tafeln findet man $7\,077\,888 = (192)^3$; also wird $7,077\,888 = (1,92)^3$; und da dieses mehr als 7 ist, so nehme man den nächst kleinern Cubum

*) Kästners Anfangsgr. der Arithm. Cap. IV. §. 44. ꝛc.

bum 6 967 871, und es fällt $\sqrt[3]{7}$ zwischen 1,91 und 1,92. Vermittelst der Buchnerischen Tafeln findet man $\sqrt[3]{6\,989\,782\,529} = 1912$, also $\sqrt[3]{7} = 1,912$. Die Buchnerischen sind aber so voller Fehler, daß man sie erstlich durch und durch ausbessern muß, ehe man sie sicher brauchen kann. Mittelst der Buchstabenrechnung lassen sich Vorschriften finden, nach welchen man solche Tafeln leicht durch die Addition verfertigen kann.

Es sey z. B. eine Wurzel $= n$, und die nächstgrößere $= n + 1$, so ist $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
und $n^2 = n^2$

also der Unterschied zweyer Quadrate, deren Wurzeln um 1 unterschieden sind, $= 2n + 1 = n + (n + 1)$.

Hieraus entspringt die Regel: Wenn man zu einem Quadrat das nächstfolgende verlangt, so addire man zu jenem seine Wurzel, nebst derjenigen, welcher das nächstgrößere Quadrat zugehört. Z. B. von 10 ist das Quadrat $= 100$;
um also 11^2 zu haben, addire man $10 + 11 = 21$,
so erhält man $(11)^2 = 121$.
Ferner addirt: $11 + 12 = 23$,
so erhält man $(12)^2 = 144$ etc.

Eben so ist $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$,
und $n^3 = n^3$,

also der Unterschied $3n^2 + 3n + 1$.
Man subtrahire hiervon $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$,
so bleibt $2n^2 + n$;

also ist der Unterschied zweyer Cuborum, deren Wurzel um 1 unterschieden ist, $= (n+1)^2 + n^2 + n$.

Hieraus entspringt folgende Regel: Wenn man den Cubus einer nächstgrößern Zahl verlangt, so addire man zum gegenwärtigen seine Wurzel nebst ihrem doppelten Quadrat und dem Quadrat der nächstgrößern Wurzel. Z. B. $10^3 = 1000$,

$$\begin{array}{rl} \text{also addire man } n &= 10 \\ 2n^2 &= 200 \\ \text{und } 11^2 = (n+1)^2 &= 121, \\ \hline \text{so erhält man } 11^3 &= 1331. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Ferner, add. } 11 & \quad 11 \\ 2(11)^2 &= 242 \\ 12^2 &= 144, \\ \hline \text{so ist } 12^3 &= 1728. \end{array}$$

§. 312.

Anm. Quadrat- und Cubikwurzeln aus den ersten 1000 Zahlen bis auf Zehnmilliontheile, von Hrn. Röhl berechnet, finden sich in den Schulzischen Tafeln, auch sonst Tafeln von Potenzen; ingleichen in den Vegaischen Tafeln.

Aus dem Wurzeltäfelchen (§. 255.) ersieht man, daß von folgenden Ziffern:

A: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
B: 0, 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9,

jede aus der obersten Reihe die niedrigste der Wurzel, und die ihr entsprechende in der untersten die niedrigste des dazu gehörigen Cubi sey. Hieraus folgt, daß man von jeder vollkommnen Cubikzahl (§. 267.), deren Wurzel nicht mehr als 2 Ziffern hat, diese Ziffern ohne die gewöhnliche Ausziehung finden kann. Man theilt nemlich diese Zahl in Classen (§. 279.), und sucht die Classe linker Hand im Wurzeltäfelchen (§. 255.) auf, so steht darüber die erste Ziffer der Wurzel, und die niedrigste Ziffer der Classe rechter Hand

wird

wird hier in der Reihe B aufgesucht, so steht darüber in der Reihe A die andere Ziffer der Wurzel. Z. B. die Cubikzahl sey = 185 193, so sieht man aus der ersten Classe 185, daß ihr im Cubiktäfelchen die 5 als Wurzel zugehört, und die Endesziffer 3, in der letzten Classe in der Reihe B aufgesucht, hat über sich in der Reihe A die 7, also ist die verlangte Cubikwurzel 57.

§. 313. Ausziehung der Wurzeln von höhern Graden.

Anm. Für die Wurzeln von höhern Graden, z. B. zur Ausziehung der Biquadratwurzel, kann man den Cubum $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ wieder multipliciren durch $a + b$, so erhält man einen allgemeinen Ausdruck für das Biquadrat, woraus man eben solche Regeln, wie für die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln, herleiten kann.

$$\begin{array}{rrrrr}
a^3 & +\,3a^2b & +\,3ab^2 & +\,b^3 & \\
a & +\,b & & & \\
\hline
a^4 + 3a^3b & +\,3a^2b^2 & +\,ab^3 & & \\
+\,a^3b & +\,3a^2b^2 & +\,3ab^3 & +\,b^4 & \\
\hline
a^4 + 4a^3b & +\,6a^2b^2 & +\,4ab^3 & +\,b^4 &
\end{array}$$

Man kann aber auch aus der Zahl erstlich die Quadratwurzel, und hernach aus dieser Quadratwurzel aufs neue die Quadratwurzel ausziehen, weil $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$ (§. 304.). In der Algebra zeigt der binomische Lehrsatz, wie jede Wurzel ausgezogen werden kann.

§. 314. Bestimmung des Werths der Irrationalzahlen durch Näherung.

Anm. Den Irrationalzahlen, die von Wurzeln herrühren, kann man sich, so weit man will, nähern (§. 276. 283.), daß dasjenige, was noch an

dem völligen Werthe einer solchen Zahl mangelt, kleiner wird, als jede Größe, die sich angeben läßt (data quavis quantitate minus). Und also kann man allemal Rationalzahlen finden, die sich zu jedem Gebrauche in der Ausübung ohne den geringsten merklichen Fehler statt ihrer setzen lassen. Die Lehrsätze aber von den Rationalzahlen kann man allezeit auch auf diese Irrationalzahlen anwenden, wenn man nur setzt, daß diese Näherung ohne Ende fortgeschehen könne; denn man kann die Irrationalzahl als aus zwey Stücken zusammengesetzt ansehen, davon das eine, ihr Anfang, rational ist, und sich nach Gefallen forttreiben läßt, so daß das andere Stück, ihr Ende, welches in völliger Schärfe immer unbekannt bleibt, doch kleiner wird, als jede angegebne Größe; so beträgt das, was an $\sqrt{2}$ (§. 276.) fehlt, weniger als 0,000001. Es sey also x eine Irrationalzahl, A ihr rationaler Anfang, (z. B. 1,414213 bey $\sqrt{2}$ (§. 276.),) a ihr unbekanntes Ende, so muß alles von x wahr seyn, was von einer unbestimmten Rationalzahl, wie A, wahr ist; denn dieses A kann einen so beträchtlichen Theil von x ausmachen, als man will, gegen welchen a immer kleiner und kleiner werden, und also so zu reden verschwinden kann.

§. 315.

Anm. Will man also eine Irrationalzahl, nach Art der Brüche, durch eine ganze Zahl ausdrücken, so muß man für die Einheit, die sie messen soll, immer kleinere und kleinere Theile der ganzen 1 annehmen, von welchen die Irrationalzahl immer größere und größere Mengen enthält. So ist $\sqrt{2} = 14 . \frac{1}{10} = 141 . \frac{1}{100} = 1414 . \frac{1}{1000}$ u. s. w., so daß immer noch etwas fehlt, und sich die Menge der Einheiten, durch welche $\sqrt{2}$ genau gemessen würde, so wenig als

als die Größe einer solchen Einheit vollkommen angeben läßt. Wenn man die 1 ohne Ende immer in kleinere Theile theilt, und von diesen kleineren Theilen immer größere Mengen nimmt, so kömmt man der Irrationalzahl immer näher, erreicht sie aber nie völlig. Man kann sie also als eine unzählige Menge unendlich kleiner Theile ansehen. Wer ihr dieserwegen den Namen einer Zahl abspräche, müßte solches auch bey den unendlichen Decimalbrüchen thun (§. 205.).

§. 316.

Anm. Man kann in einer Irrationalzahl nicht allein das übrige Unbekannte, so weit man will, vermindern, sondern man kann auch die Irrationalzahl selbst, vorhin gelehrter maßen, zwischen zwey Rationalzahlen einschränken, die einander so nahe kommen können, als man will, wie z. B. $\sqrt{2}$ zwischen 1,414213 und 1,414214 fallen muß, deren Unterschied nur 0,000001 beträgt. Was also von diesen Grenzen, die man nach Gefallen noch verengern kann, wahr ist, das muß auch von dem dazwischen enthaltenen wahr seyn. Man setze, x, y sind zwey Irrationalzahlen, A, B ihre gefundenen rationalen Theile, a, b die Enden, die man nie völlig finden wird; so daß $x = A + a$, und $y = B + b$; gesetzt nun, der Satz in §. 79. gelte nicht von Irrationalzahlen, oder es wäre nicht $x . y = y . x$, so müßte man, wenn man A und B ohne Ende fortsuchte, nothwendig so weit kommen, daß einmal $A . B$ nicht $= B . A$ wäre. Aehnliche Bewandtniß hat es auch mit den übrigen Sätzen, wo Irrationalzahlen vorkommen.

5. Von den Verhältnissen und Proportionen *).

§. 317. Vorderglied, Hinterglied, Verhältnisse der Gleichheit, der Ungleichheit.

Erklärung. Das Verhältniß zweyer Größen a und b (ratio) heißt die Art, wie die eine aus der andern erzeugt wird. Die Größen a und b, deren Verhältniß man betrachtet, heißen Glieder des Verhältnisses (termini rationis). Dasjenige Glied, welches man zuerst setzt, heißt das vorhergehende, oder Vorderglied (antecedens), und das andere das nachfolgende, oder Hinterglied (consequens). Sind beide Glieder gleich, so heißt ihr Verhältniß ein Verhältniß der Gleichheit (ratio aequalitatis); sind sie ungleich, so heißt es ein Verhältniß der Ungleichheit (ratio inaequalitatis).

§. 318.

Zus. Also besteht jedes Verhältniß aus zwey Gliedern.

§. 319.

Zus. Die beiden Glieder eines Verhältnisses müssen gleichartig seyn; denn die Bestimmung, wie vielmal zur Form eines Dinges, ein ihm gleichartiges mit sich selbst verknüpft werden muß, macht seine Größe aus.

§. 320.

Zus. Da nun von zwey entgegengesetzten Größen, ob sie gleich an sich ungleichartig sind, dennoch die eine allemal mit der andern als gleichartig gesetzt werden kann, nur so, daß sie, statt der Addition, von dieser subtrahirt, und, statt der Subtraction,

zu

*) Schulze Anfangsgr. der reinen Mathes. 6. Abschn.

zu ihr addirt werden muß (§. 229.), so findet auch zwischen zwey entgegengesetzten Größen allemal ein Verhältniß statt.

§. 321. Eintheilung der Verhältnisse, je nachdem durch Subtraction oder Division blos der Unterschied oder die eigentliche Quantität bestimmt wird.

Zus. Die allgemeinste Art, wie eine Größe a aus einer andern b erzeugt werden kann, besteht darin, daß man eine dritte d zu b addirt, oder von b subtrahirt. Nun aber beruht die Subtraction schon auf Addition (§. 36.), folglich ist die allgemeinste Art, wie a aus b erzeugt werden kann, diese, daß man auf die Größe d sieht, die zu b addirt werden muß, um a zu erzeugen. Allein hierdurch wird noch nicht die Quantität von a bestimmt, sondern dieses geschieht blos dadurch, daß man a durch b mißt (§. 53.), nemlich, daß man bestimmt, wie vielmal entweder b selbst, oder ein aliquoter Theil von b genommen werden muß, um a zu erzeugen (§. 53.), d. i. daß man die ganze Zahl oder den Bruch bestimmt, wodurch b multiplicirt werden muß, um a zu erzeugen (§. 73. 176.). Also giebt es nur zwey allgemeine Arten von Verhältnissen, in welchen zwey Größen a und b stehen können, indem man entweder auf die Größe d sieht, die zu b addirt, oder auf die Zahl n, durch welche b multiplicirt werden muß, um a zu erzeugen. Das erstere bestimmt blos den Unterschied der beiden Größen (§. 36.), das zweyte aber bestimmt ihre eigentliche Quantität.

§. 322. Verhältnisse bey ungleichartigen Größen.

Anm. Leibnitz (Act. Eruditor. Lipf. menf. Apr. 1712. p. 167.) und mehrere berühmte Mathematiker schließen daher, weil entgegengesetzte Grö-

ßen ungleichartig sind, daß zwischen ihnen kein Verhältniß stattfinde. Nun müssen zwar die Glieder eines Verhältnisses allerdings gleichartig seyn, und es läßt sich daher zwischen disparaten Größen, die in keiner Rücksicht als gleichartig betrachtet werden können, z. B. zwischen einer Linie und einer Fläche, kein Verhältniß denken. Allein mit den entgegengesetzten Größen hat es eine ganz andere Bewandtniß. Diese sind zwar, als solche betrachtet, freylich ungleichartig, aber sie sind gleichwohl von der Beschaffenheit, daß man sie in der That als gleichartig betrachten kann und muß; nur daß alsdenn ihre Addition soviel als Subtraction bedeutet, und umgekehrt. Mithin läßt sich jede von zwey entgegengesetzten Größen aus der andern durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division erzeugen, z. B. + 3 Rthlr. aus — 8 Rthlr., wenn man + 11 Rthlr. zu — 8 Rthlr. addirt, oder — 8 Rthlr. durch die negative Zahl — $\frac{3}{8}$ multiplicirt. Also begreift die Definition eines Verhältnisses auch die entgegengesetzten Größen in sich, und zwar finden zwischen ihnen beide Hauptverhältnisse (§. 321.) statt, indem man sowohl nach der Größe fragen kann, die zu der einen von den entgegengesetzten addirt, als nach der Zahl, durch welche diese multiplicirt werden muß, um die andere zu erzeugen. Fände hingegen zwischen entgegengesetzten Größen kein Verhältniß statt, so könnte auch nicht die eine aus der andern auf irgend eine Art erzeugt werden, mithin fände gar keine Rechnung mit entgegengesetzten Größen statt, sondern diese wären eben so, wie Linie und Fläche, völlig disparat. Noch auffallender aber ist der Widerspruch, wenn diejenigen, die zwischen entgegengesetzten Größen kein Verhältniß zugeben wollen, dennoch ihre Multiplication und Division aus ihrem Verhältnisse zu demonstriren suchen.

§. 323.

§. 323. Arithmetische Verhältnisse.

Erklär. Wenn man bey zwey Größen a und b auf die Größe d sieht, die zur zweyten b addirt werden muß, um die erste a zu erzeugen; so heißt das Verhältniß der Größen a, b, das arithmetische, und die Größe d der Name derselben, d. i. a, b stehen im arithmetischen Verhältnisse, wenn $a = b + d$ ist. Z. B. im arithmetischen Verhältnisse 7 und 3, ist 4 der Name, und im Verhältnisse 3 und 7, ist -4 der Name. Zur Bezeichnung des arithmetischen Verhältnisses bedient man sich des Subtractionszeichens, z. B. $a - b$; $7 - 3$; $3 - 7$.

§. 324.

Zus. Man bekommt also das vorhergehende Glied, wenn man zum nachfolgenden den Namen addirt. Z. B. der Name sey 10 und das folgende Glied 16, so ist das vorhergehende 26, und das Verhältniß selbst $26 - 16$.

§. 325.

Zus. Das nachfolgende Glied bekommt man, wenn man vom vorhergehenden den Namen subtrahirt. Denn weil im Verhältnisse $a - b$, $a = b + d$ (§. 324.), so bekommt man b, wenn man d von a subtrahirt. Z. B. man bekommt die 16 im vorigen §, wenn man von 26 den Namen 10 abzieht.

§. 326.

Zus. Den Namen d bekommt man, wenn man das nachfolgende Glied b vom vorhergehenden a subtrahirt. Denn da im Verhältnisse $a - b$, $a = b + d$ ist (§. 324.), so bekommt man d, wenn man b von a abzieht (§. 38.). Z. B. von obiger 26 die 16 abgezogen, giebt den Namen 10.

§. 327.

Zus. Also ist im arithmetischen Verhältnisse der Gleichheit a — a, der Name = 0 (§. 40.).

§. 328. Gleiche und ungleiche arithmetische Verhältnisse.

Erklär. Zwey arithmetische Verhältnisse heißen gleich, wenn sie gleiche Namen haben; ungleich, wenn sie ungleiche Namen haben. Z. B. 3 — 7 und 5 — 9 sind gleiche Verhältnisse, weil in beiden der Name = — 4 ist, und man sagt daher: 3 verhält sich zu 7 eben so, wie 5 zu 9.

§. 329.

Zus. Wenn zwey arithmetische Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich. Denn da sowohl der Name des ersten, als des zweyten, dem Namen des dritten gleich ist, so ist der Name des ersten dem Namen des zweyten gleich (§. 7.), also auch das erste Verhältniß dem zweyten gleich.

§. 330. Arithmetische Proportion. Aeußerste, mittlere Glieder; stetige und unterbrochene Proportion; mittlere arithmetische Proportionalgröße.

Erklär. Die Gleichheit zweyer arithmetischen Verhältnisse giebt eine arithmetische Proportion, nämlich wenn a — b = c — g, so sagt man: die vier Größen a, b, c, g, stehen nach der Ordnung, wie sie folgen, in einer arithmetischen Proportion, oder sie sind arithmetisch proportional, z. B. 3 — 7 = 5 — 9. Das erste und vierte Glied heißen die beiden äußersten Glieder (term. extremi), z. B. 3 und 9; das zweyte und dritte, die beiden mittleren

ren (medii), z. B. 7 und 5. Sind die beiden mittleren Glieder gleich, z. B. $3 - 7 = 7 - 11$, so heißt die Proportion eine stetige (continua), und das mittlere Glied, das zweymal vorkommt, heißt die mittlere arithmetische Proportionalgröße der beiden äußern. Sind sie aber ungleich, so heißt die Proportion eine unstetige oder unterbrochene (discreta), z. B. $3 - 7 = 5 - 9$.

§. 331.

Lehrsatz. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußern Glieder der Summe der beiden mittlern gleich, d. i. wenn $a - b = c - g$ ist, so ist $a + g = b + c$. Z. B. bey $3 - 7 = 5 - 9$ ist $3 + 9 = 7 + 5 = 12$.

Beweis. Man setze im Verhältnisse $a - b$ den Namen $= d$, so ist er im Verhältnisse $c - g$ ebenfalls $= d$ (§. 330.), folglich ist $a = b + d$, und $c = g + d$ (§. 324.), mithin $a + g = b + d + g$, und $b + c = b + g + d$ (§. 29.) $= b + d + g$ (§. 30.), also $a + g = b + c$ (§. 7.).

§. 332.

Zus. Es ist also in einer stetigen arithmetischen Proportion die Summe der beiden äußern Glieder zweymal so groß, als das mittlere, d. i. wenn $a - b = b - c$ ist, so ist $a + c = b + b = 2b$. Z. B. $3 - 7 = 7 - 11$, wo die äußersten Glieder $3 + 11 = 2 \times 7 = 14$ machen.

§. 333.

Lehrs. Wenn von vier Größen die Summe der ersten und vierten der Summe der zweyten und dritten gleich ist, so sind sie in einer arithmetischen Proportion; d. i. wenn $a + g = b + c$ ist, so ist

$a - b$

$a - b = c - g$. Z. B. wenn $3 + 9 = 5 + 7$, so ist $3 - 7 = 5 - 9$.

Beweis. Man setze im Verhältnisse $a - b$ den Namen $= d$, so ist $a = b + d$ (§. 324.), folglich $a + g = b + d + g$ (§. 29.). Nun ist $a + g = b + c$ nach d. Voraussf., folglich $b + c = b + d + g$ (§. 7.), mithin $c = d + g$ (§. 42.), folglich ist im Verhältnisse $c - g$ der Name gleichfalls d (§. 323.), also ist $a - b = c - g$ (§. 328.).

§. 334.

Zus. Wenn daher die Summe zweyer Größen zweymal so groß ist, als eine dritte Größe, so ist diese die mittlere arithmetische Proportionalgröße zwischen jenen, d. i. wenn $a + c = 2b$ ist, so ist $a - b = b - c$. Denn wenn $a + c = 2b$ ist, so ist $a + c = b + b$ (§. 73.), also $a - b = b - c$ (§. 333.). Z. B. wenn $5 + 7 = 2 \times 6$ ist, so ist $5 - 6 = 6 - 7$.

§. 335.

Aufgabe. Zu drey gegebnen Größen: a, b, c, die vierte arithmetische Proportionalgröße x zu finden.

Auflös. Man addire die zweyte und dritte, und von der Summe $b + c$ subtrahire man die erste a. Z. B. zu 3, 7, 5 ist die vierte arithmetische Proportionalzahl $7 + 5 - 3 = 9$.

Beweis. Wenn $x = b + c - a$ ist, so ist $a + x = b + c$ (§. 37.), also $a - b = c - x$ (§. 333.) oder $3 - 7 = 5 - 9$.

§. 336.

Aufgabe. Zwischen zwey gegebnen Größen a, b, die mittlere arithmetische Proportionalgröße x zu finden.

Auf-

Auflös. Man halbire ihre Summe, so ist $\frac{a+b}{2}=x$. Z. B. die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen 8 und 54 ist $=\frac{8+54}{2}=\frac{62}{2}=31$.

Beweis. Denn wenn $x=\frac{a+b}{2}$ ist, so ist $2x=a+b$ (§. 87.), also $a-x=x-b$ (§. 334.).

§. 337. Exponent, Rational=, Irrationalverhältniß.

Erklär. Wenn man bey zwey Größen a und b auf die Zahl m sieht, durch welche die zweyte Größe b multiplicirt werden muß, um die erste a zu erzeugen, so heißt das Verhältniß der Größen a, b, das geometrische, und die Zahl m der Exponent desselben; d. i. a, b stehen im geometrischen Verhältnisse, wenn $a=b\times m$ ist. Z. B. im Verhältnisse 12 zu 4 ist der Exponent 3; im Verhältnisse 4 zu 12 ist der Exponent $\frac{1}{3}$; im Verhältnisse $+4$ zu -12 ist der Exponent $-\frac{1}{3}$. Ist der Exponent m eine Rationalzahl, so heißt das Verhältniß ein Rationalverhältniß; ist aber m eine Irrationalzahl, so heißt es ein Irrationalverhältniß. Zur Bezeichnung des geometrischen Verhältnisses hat Leibnitz das Divisionszeichen eingeführt, z. B. a:b oder 12:4.

§. 338.

Zus. Also bekommt man im Verhältnisse a:b das vorhergehende Glied a, wenn man das nachfolgende b durch den Exponenten m multiplicirt, d. i. $a=b\times m$, z. B. $12=4\times 3$.

§. 339.

Zus. Das nachfolgende Glied b bekommt man, wenn man das vorhergehende a durch den Exponenten m dividirt, oder durch $\frac{1}{m}$ multiplicirt; denn weil

$a = b \times m$ ist (§. 338.), so ist $b = \frac{a}{m}$ (§. 87.)

$= \frac{1}{m} a$ (§. 176.). Z. B. 3 in 12 dividirt, giebt 4; eben so wie $\frac{1}{3} \times 12 = 4$.

§. 340.

Zus. Wenn die Glieder a, b Zahlen sind, so bekommt man den Exponenten m, wenn man das vorhergehende a durch das nachfolgende b dividirt. Denn da $a = b \times m$ ist (§. 338.), so ist, wenn b eine Zahl ist, $a = m \times b$, also $m = \frac{a}{b}$ (§. 87.). Z. B. 4 in 12 dividirt, giebt den Exponenten 3.

§. 341.

Zus. Sind hingegen die Glieder a, b, nicht Zahlen, sondern Größen von besonderer Art, z. B. zwey Linien, so läßt sich, weil der Divisor allemal eine Zahl seyn muß (§. 89.), a durch b nicht dividiren. Also kann man in diesem Falle den Exponenten m nicht durch die Division finden, sondern hiezu ist ein ganz anderer Weg nöthig. Z. B. 12 Fuß zu 3 Fuß.

§. 342.

Zus. Da der Exponent allemal eine Zahl ist (§. 72.), so läßt er sich, er mag eine Rational- oder Irra-

Irrationalzahl seyn, allgemein durch einen Bruch $\frac{n}{v}$ ausdrücken (§. 162.).

§. 343.

Zus. Den Exponenten m eines geometrischen Verhältnisses a:b finden, heißt, die Größe a durch die Größe b messen. Denn da der Exponent m entweder eine ganze Zahl, oder ein Bruch, und $a = b \times m$ (§. 338.) ist, so bestimmt er im erstern Falle, wie vielmal die Größe b selbst (§. 73.); und im andern, wie vielmal irgend ein aliquoter Theil von b genommen werden muß, um a zu erzeugen (§. 176.); also ist, so bald man den Exponenten m weiß, a durch b gemessen (§. 53.).

§. 344. **Name des Verhältnisses.**

Anmerk. Da die Ausmessung der Größen das Hauptziel der Mathematik ist, diese aber auf ihrem geometrischen Verhältnisse beruht (§. 343.), so ist hieraus die Wichtigkeit des letztern klar. Die Alten gaben daher demselben auch einzig und allein den Namen eines **Verhältnisses**, und wenn man schlechthin von einem Verhältnisse der Größen redet, so versteht man noch jetzt immerfort das geometrische. In der That verdient auch das arithmetische den Namen eines besondern Verhältnisses nicht, indem es nichts weiter als bloße Subtraction ist, und man könnte daher desselben gänzlich entbehren, und die Sätze, die unter der Rubrik der arithmetischen Verhältnisse und Proportionen aufgeführt werden, sofort bey der Lehre von der Subtraction mitnehmen, wenn diese Sprache heut zu Tage nicht bereits zu allgemein geworden wäre.

§. 345.

Anmerk. Man pflegt das geometrische Verhältniß so zu erklären: das Verhältniß zweyer Größen

heißt geometrisch, wenn man auf die Zahl sieht, welche herauskommt, wenn man die eine Größe durch die andere dividirt. Allein diese Definition paßt blos auf diejenigen Verhältnisse, wo beide Glieder Zahlen sind (§. 340.), nicht aber auf diejenigen, wo die Glieder besondere Größen sind (§. 341.). Diese Verwirrung des geometrischen Verhältnisses mit der Division, rührt, nebst dem Vorurtheil, als ob der Divisor nicht eben eine Zahl seyn dürfe, blos aus dem unrichtigen Begriffe der Division her: a durch b dividiren, heiße soviel, als finden, wie vielmal der Divisor b im Dividend a enthalten sey, und wie vielmal man ihn also von a abziehen könne. Allein diese Definition des Dividirens gilt blos für den Fall, wenn der Dividend und Divisor beide Zahlen sind; dagegen paßt sie schon auf den Fall, wo eine besondre Größe durch eine Zahl dividirt werden soll, gar nicht, denn fragen: wie vielmal ist die Zahl 3 im Pfunde, oder in der Linie enthalten, oder wie vielmal läßt sich die Zahl 3 vom Pfunde oder von der Linie abziehen, wäre ungereimt. Nun aber ist doch dieser Fall der Division schlechterdings möglich, denn, wenn ich ein Pfund oder eine Linie durch die Zahl 3 dividire, so ist der Quotient $\frac{1}{3}$ Pfund, oder der dritte Theil der gegebnen Linie. Also ist gedachte Definition des Dividirens offenbar zu enge, mithin logisch unrichtig. Die Frage: wie vielmal ist die Größe b in a enthalten, d. i. wie vielmal muß b, oder ein aliquoter Theil von b genommen werden, um a zu erhalten? sagt also nicht: was für ein Quotient kommt heraus, wenn ich a durch b dividire, sondern was für eine Zahl ist der Exponent des Verhältnisses a:b, und blos in dem Fall ist Exponent und Quotient einerley, wenn beide Größen, a, b, Zahlen sind. Um daher aller weitern Verwirrung des Begriffs der Division mit dem Begriff des geo-

metri-

metrischen Verhältnisses vorzubauen, bestimmt der Hr. Prof. Schulz den Unterschied zwischen beiden genau durch folgende Puncte:

1) Im Verhältnisse a:b fragt man nach dem **Multiplicator**, durch welchen b multiplicirt werden muß, um a zu erzeugen; z. B. wenn a = 12, b = 4, so frage ich nach dem Multiplicator 3, durch welchen 4 multiplicirt werden muß, um 12 zu erzeugen. Wenn hingegen a durch b dividirt werden soll, so fragt man nach dem **Multiplicand**, der durch b multiplicirt werden muß, um a zu erzeugen; z. B. ich frage nach der 3, die durch 4 multiplicirt werden soll, um 12 zu erzeugen.

2) Die beiden Glieder des Verhältnisses a:b müssen schlechterdings gleichartig seyn; denn fragen: wie verhält sich die Elle zur Stunde, oder zur Zahl 4? ist Unsinn. Wenn hingegen a durch b dividirt wird, so dürfen der Dividend a und der Divisor b nicht gleichartig seyn, sondern die Elle durch die Zahl 4 dividirt, giebt $\frac{1}{4}$ Elle.

3) Im Verhältnisse a:b kann b eine jede mit a gleichartige Größe seyn, z. B. eine Elle; wenn dagegen a durch b dividirt werden soll, so muß der Divisor b schlechterdings eine Zahl seyn; z. B. 12 Rthlr. durch die Zahl 4 dividirt, giebt 3 Rthlr.

4) Im Verhältnisse a:b ist der **Exponent** allemal eine Zahl, z. B. in 12 zu 3 ist der Exponent die Zahl 4, welche niemals Ellen, Thaler oder dergleichen bedeuten kann; aber wenn man a durch b dividirt, so ist der **Quotient** beständig mit dem Dividend a gleichartig, und kann also jede Größe seyn; z. B. 12 Rthlr. durch 3 dividirt, giebt die mit 12 Rthlr. gleichartige Größe: 4 Rthlr.

Hieraus ist einleuchtend, wie wesentlich der Unterschied zwischen dem geometrischen Verhältnisse a:b, und der Division der Größe a durch die Zahl b ist;

und das ganze fünfte Buch des Euklids zeigt, wie sorgfältig er beides von einander unterschieden hat. Aus diesem Grunde ist es auch schlechterdings nöthig, die Lehre von den geometrischen Verhältnissen durchaus nicht aus der Division der Zahlen, sondern lediglich aus der Definition des Verhältnisses zweyer Größen überhaupt, herzuleiten. Denn wie wollte man sich für befugt halten, Sätze, die blos für Zahlenverhältnisse aus der Division ihrer Glieder hergeleitet sind, in der besondern und angewandten Mathematik auf Verhältnisse von besondern Größen anzuwenden, die sich gar nicht durch einander dividiren lassen? Das Leibnitzische Zeichen ist daher nicht eben zu wohl gewählt, indem es leicht Anlaß giebt, Verhältniß mit Division zu verwirren, und nicht wenigen Mathematikern den wahren Gesichtspunct, auf welchen es bey den Demonstrationen in der Lehre von den Verhältnissen ankommt, wirklich aus den Augen gerückt hat. Indessen läßt sich diese Verwirrung völlig vermeiden, wenn man in dieser Lehre das Verhältniß von a und b beständig durch das Divisionszeichen, nämlich a:b, die Division von a durch b aber beständig durch das Bruchzeichen, nämlich $\frac{a}{b}$, ausdruckt.

§. 346. Gleiche und ungleiche geometrische Verhältnisse.

Erklärung. Geometrische Verhältnisse heißen gleich, wenn sie gleiche Exponenten haben; ungleich, wenn ihre Exponenten ungleich sind; und zwar heißt von diesen dasjenige das größere, welches einen größern Exponenten hat. Z. B. 6:2 und 12:4 sind gleiche Verhältnisse, denn in beiden ist der Exponent = 3, und man sagt daher: 6 verhält sich zu 2, wie 12 zu 4. Dagegen sind 8:2 und 12:4 ungleiche

Ver=

Verhältnisse, denn im erstern ist der Exponent 4, und im letztern 3, folglich ist das erstere größer, als das letztere.

§. 347.

Zus. Also sind alle Verhältnisse der Gleichheit gleich, d. i. $a:a = b:b$, denn in beiden ist der Exponent $= 1$ (§. 74.). Z. B. $3:3 = 5:5$.

§. 348.

Zus. Wenn zwey geometrische Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich; d. i. wenn $a:b = g:h$, und $c:d = g:h$ ist, so ist auch $a:b = c:d$. Denn da sowohl der Exponent von $a:b$, als der von $c:d$ dem Exponenten von $g:h$ gleich ist (per def.), so ist der Exponent von $a:b$ dem Exponenten von $c:d$ gleich (§. 7.), also $a:b = c:d$ (p. def.). Z. B. $12:4 = 3:1$ und $30:10 = 3:1$, also auch $12:4 = 30:10$.

§. 349.

Zus. In jedem Verhältnisse verhält sich das vorhergehende Glied zum nachfolgenden, wie der Exponent zur Zahl 1; d. i. es ist allemal $a:b = m:1$. Denn man setze im Verhältnisse $a:b$ den Exponenten $= m$. Da nun $m = 1 \times m$, so ist im Verhältnisse $m:1$ der Exponent ebenfalls $= m$ (§. 337.), also $a:b = m:1$. Z. B. $12:4 = 3:1$.

§. 350.

Zus. Jeder Zahlenquotient verhält sich zur Zahl 1, wie der Dividend zum Divisor, d. i. $\frac{n}{r}:1 = n:r$. Denn weil $\frac{n}{r} = 1 \times \frac{n}{r}$, so ist im Verhält-

hältnisse $\frac{n}{r}:1$ der Exponent $= \frac{n}{r}$ (§. 337.), und im Verhältnisse $n:r$ ist er ebenfalls $= \frac{n}{r}$ (§. 340.), also $\frac{n}{r}:1 = n:r$. Z. B. wenn man die Zahl 12 durch die Zahl 4 dividirt, so ist der Quotient = 3, und diese 3 verhält sich zu 1, wie 12 zu 4.

§. 351.

Zus. Wenn man zwey Größen, a, b, durch einerley Zahl n multiplicirt, so verhält sich die erste zu ihrem Product, wie die zweyte zu dem ihrigen; d. i. $a:na = b:nb$. Denn weil $a = na \times \frac{1}{n}$, und $b = nb \times \frac{1}{n}$ (§. 87.), so ist in beiden Verhältnissen der Exponent $= \frac{1}{n}$ (§. 337.). Z. B. 12 und 4 durch 5 multiplicirt, giebt 60 und 20, und es verhält sich 12 zu 60, wie 4 zu 20, indem der Exponent in beiden $= \frac{1}{5}$ ist.

§. 352.

Zus. Wenn man zwey Größen, a, b, durch einerley Zahl n dividirt, so verhält sich die erste zu ihrem Quotienten, wie die zweyte zu dem ihrigen; d. i. $a:\frac{a}{n} = b:\frac{b}{n}$. Denn weil $a = \frac{a}{n} \times n$, und $b = \frac{b}{n} \times n$ (§. 87.), so ist in beiden Verhältnissen der Exponent = n (§. 337.). Z. B. man dividire die

die Größen 24 und 18 durch 6, so verhält sich 24 zu 4, wie 18 zu 3, indem in beiden Fällen der Exponent = 6 ist.

§. 353.

Lehrs. Wenn man zwey gleichartige Größen, a, b, durch einerley Zahl n multiplicirt, so verhalten sich die Producte, wie die multiplicirten Größen, d. i. $na:nb = a:b$. Z. B. $3 \times 4 : 3 \times 6 = 4 : 6$.

Beweis. Man setze im Verhältnisse $a:b$ den Exponenten $= m$, so ist $a = mb$ (§. 338.), folglich $na = nmb$ (§. 71.) $= mnb$; mithin ist im Verhältnisse $na:nb$ der Exponent ebenfalls $= m$ (§. 337.), also $na:nb = a:b$ (§. 346.).

§. 354.

Lehrs. Wenn man eine Größe a durch zwey Zahlen n und r multiplicirt, so verhalten sich die Producte, wie die Multiplicatoren, d. i. $na:ra = n:r$. Z. B. 4 Pf. : 7 Pf. = 4 : 7.

Beweis. Man setze im Verhältnisse $n:r$ den Exponenten $= m$, so ist $n = mr$ (§. 338.), folglich $na = mra$ (§. 71.), also ist im Verhältnisse $na:ra$ der Exponent ebenfalls $= m$ (§. 337.), folglich $na:ra = n:r$ (§. 346.).

§. 355.

Zus. Also verhält sich jedes Product zum Multiplicand, wie der Multiplicator zur Zahl 1, d. i. $na:a = n:1$. Denn $a = a \times 1$ (§. 74.). Z. B. 4mal 3 = 12, also 12 : 3 = 4 : 1.

§. 356.

Anmerk. Vermöge dieses letztern Satzes hat man versucht, den Begriff der Multiplication so zu erweitern, daß der Multiplicator eine jede Größe seyn könne.

könne. Man erklärt nemlich dieselbe also: eine Größe a durch eine Größe b multipliciren, heißt eine Größe p finden, die sich zu a eben so verhält, wie die Größe b zur gleichartigen c, die man als Einheit annimmt, z. B. 8 Rthlr. durch 3 Pf. multipliciren, heißt eine solche Größe p finden, daß p : 8 Rthlr. = 3 Pf. : 1 Pf. sey. Allein diese vermeinte Erweiterung ist ein bloßes Blendwerk, das zu nichts dient, als die mathematischen Begriffe zu verwirren. Denn

1) Wie verfährt man bey dieser Multiplication? da 3 Pf. : 1 Pf. = 3 : 1 (§. 354.) ist, so setzt man p : 8 Rthlr. = 3 : 1, d. i. man multiplicirt die 8 Rthlr. nicht durch 3 Pf., sondern durch die Zahl 3, ohne auf die Größe, Pfund, im mindesten Rücksicht zu nehmen, und das Product bleibt immer das nämliche, 24 Rthlr., man mag die 8 Rthlr. durch 3 Pf. oder durch 3 Meilen u. s. w. multipliciren. Wollte man hingegen auf die Größe, Pfund, wirklich Rücksicht nehmen, so würde, da 3 Pf. = 48 Unzen = 96 Loth ist, 8 Rthlr. ⋊ 3 Pf. = 8 Rthlr. ⋊ 48 Unzen = 8 Rthlr. ⋊ 96 Loth seyn. Nun aber wäre nach der Definition 8 Rthlr. ⋊ 48 Unzen = 384 Rthlr. = 768 Rthlr. Nimmt man statt 1 Pf. zur Einheit 2 Pf. an, so daß p : 8 Rthlr. = 3 Pf. : 2 Pf. seyn soll, so kann man die Multiplication hier wieder nicht anders verrichten, als daß man, da 3 Pf. : 2 Pf. = 3 : 2 = $\frac{3}{2}$: 1 ist, p : 8 Rthlr. = $\frac{3}{2}$: 1 setzt; und daher 8 Rthlr. wiederum nicht durch Pfunde, sondern durch die Zahl $\frac{3}{2}$ multiplicirt, und das Product 12 Rthlr. bleibt hier wieder immer dasselbe, ich mag die 8 Rthlr. durch $\frac{3}{2}$ Pf. oder $\frac{3}{2}$ Stunden u. s. w. multipliciren. Eine Größe p von der Art finden, daß p : 8 Rthlr. = 3 Pf. : 1 Pf., oder p : 8 Rthlr. = 3 Pf. : 2 Pf. ist, heißt also gar nicht: 8 Rthlr. durch 3 Pfund multipliciren, sondern 8 Rthlr. durch

den Exponenten 3, des Verhältnisses 3 Pf. : 1 Pf., oder durch den Exponenten $\frac{3}{2}$, des Verhältnisses 3 Pf. : 2 Pf., multipliciren.

2) Da das Product p beständig mit dem Multiplicand gleichartig seyn muß, so kommt die Qualität des Multiplicators b in keine Betrachtung. Wenn also z. B. der Multiplicand a eine Linie ist, so müßte das Product p ebenfalls immerfort eine Linie seyn, man möchte die Linie a wieder durch eine Linie, oder durch eine Fläche, einen Körper, einen Thaler u. s. w. multipliciren. Multiplicirt man hingegen eine Fläche, oder einen Körper, oder einen Thaler rc. durch eine Linie, so müßte das Product im ersten Fall eine Fläche, im zweyten ein Körper, im dritten ein Thaler seyn. Nun aber ist es in der Geometrie ganz gewöhnlich zu sagen: eine Linie durch eine Linie multiplicirt, giebt zum Product eine Fläche, und eine Fläche durch eine Linie, oder umgekehrt, eine Linie durch eine Fläche multiplicirt, giebt einen Körper. Wie stimmt nun diese Sprache mit der vorigen? Muß es nicht die größte Verwirrung anrichten, wenn man das Wort Multiplication in zwey Bedeutungen gebraucht, die sich so geradezu widersprechen? und ist es also wol zu verwundern, wenn die friedfertigen Mathematiker sich hier aus bloßem Mißverständnisse über die Frage entzweyen: ob eine Linie, durch eine Linie multiplicirt, eine Linie, oder eine Fläche zum Product gebe? Das einzige Befremdende wäre vielmehr dieses, daß man über die Frage streitet: was das Product sey? ohne erst die Frage aufzuwerfen: ob die Multiplication einer Linie durch eine Linie überhaupt einen Sinn habe? Daß sie in der arithmetischen Bedeutung wirklich keinen Sinn hat, ist bereits gezeigt worden, und daß es ihr in der geometrischen Bedeutung gleichfalls daran fehlt, wird sich unten in der Geometrie zeigen. Ueberhaupt aber

muß dieses jedem Unbefangenen schon an sich einleuchten, da der Begriff von Multiplication einer Größe blos aus der Addition gleicher Summanden seinen Ursprung hat, folglich das Product nichts weiter als das Multiplum der Größe selbst, oder eines aliquoten Theils von ihr bedeutet, mithin der Multiplicator, der dieses Multiplum, oder Wievielmal bestimmen soll, nothwendig eine Zahl seyn muß.

§. 357.

Lehrs. Wenn man zwey gleichartige Größen, a, b, durch einerley Zahl n dividirt, so verhalten sich die Quotienten, wie die dividirten Größen, d. i. $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}=a:b$. Z. B. $\frac{12}{3}:\frac{9}{3}=12:9$.

Beweis. Man setze im Verhältnisse $a:b$ den Exponenten $= m$, so ist $a = mb$ (§. 338.), folglich $\frac{a}{n}=\frac{mb}{n}$ (§. 91.) $=\frac{b}{n}\times m$ (§. 176.), mithin ist im Verhältnisse $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ der Exponent ebenfalls $= m$ (§. 337.), also ist $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}=a:b$ (§. 346.).

§. 358.

Lehrs. Wenn man eine Größe a durch zwey Zahlen n und r dividirt, so verhält sich der erste Quotient zum zweyten, wie der zweyte Divisor zum ersten, d. i. $\frac{a}{n}:\frac{a}{r}=r:n$. Z. B. $\frac{12}{3}:\frac{12}{4}=4:3$.

Beweis. Man setze im Verhältnisse $r:n$ den Exponenten $= m$, so ist $n=\frac{r}{m}$ (§. 339.), folglich

lich $\frac{a}{n} = a : \frac{r}{m}$ (§. 91.) $= a \times \frac{m}{r}$ (§. 178.) $= \frac{a}{r} \times m$, mithin ist im Verhältnisse $\frac{a}{n} : \frac{a}{r}$ der Exponent gleichfalls m (§. 337.), also ist $\frac{a}{n} : \frac{a}{r} = r : n$ (§. 346.).

§. 359.

Zus. Also verhält sich jeder Quotient zum Dividend, wie die Zahl 1 zum Divisor, d. i. $\frac{a}{n} : a = 1 : n$. Z. B. $\frac{12}{3} = 4$, also $4 : 12 = 1 : 3$. Denn $a = \frac{a}{1}$ (§. 90.).

§. 360.

Anm. Durch diesen Zusatz hat man auch den Begriff der Division auf einen Divisor, der keine Zahl ist, auszudehnen, und jene so zu erklären gesucht: eine Größe a durch eine Größe b dividiren, heißt, eine Größe q finden, die sich zu a eben so verhält, wie die zur Einheit angenommene Größe c zur Größe b. Z. B. 24 Rthlr. durch 3 Pf. dividiren, heißt, eine solche Größe q finden, daß q : 24 Rthlr. = 1 Pf. : 3 Pf. sey, allein da §. 356. gezeigt worden ist, daß dieses nichts weiter bedeutet, als 24 Rthlr. durch den Exponenten $\frac{1}{3}$ multipliciren, so ist klar, daß es auch nichts anders heißt, als 24 Rthlr. durch den umgekehrten Exponenten, nemlich durch die Zahl 3, dividiren. Es würde daher unnütze Weitläuftigkeit seyn, hierüber noch mehr zu sagen, besonders da die Verwirrungen des Begriffs der Division mit dem Begriffe des geometrischen Verhältnisses, und die dadurch veranlaßte ungründliche, vom Geiste des Euklid

so sehr entfernte Theorie der Verhältnisse, die in so viel neuern Lehrbüchern sichtbar ist, schon oben (§. 345.) bemerkt, und der Unterschied zwischen Division und Verhältniß genau angezeigt worden ist.

§. 361.

Lehrsatz. Zwey gleichartige Quotienten verhalten sich wie die Producte aus dem Dividend des einen in den Divisor des andern, d. i. $\frac{a}{n} : \frac{b}{r} = ar : bn$.

Z. B. $\frac{12}{3} : \frac{8}{4} = 12 \cdot 4 : 8 \cdot 3 = 48 : 24$.

Beweis. Man setze im Verhältnisse $ar : bn$ den Exponenten $= m$, so ist $ar = mnb$ (§. 338.), folglich $a = \frac{mnb}{r}$ (§. 87.), mithin $\frac{a}{n} = \frac{mnb}{r} : n$ (§. 91.) $= \frac{mb}{r}$ (§. 87.) $= \frac{b}{r} \times m$. Also ist im Verhältnisse $\frac{a}{n} : \frac{b}{r}$ der Exponent ebenfalls $= m$ (§. 337.), folglich $\frac{a}{n} : \frac{b}{r} = ar : bn$ (§. 346.).

§. 362.

Lehrs. Wenn zwey Quotienten gleich sind, so verhalten sich die Dividendi wie die Divisoren; d. i. wenn $\frac{a}{n} = \frac{b}{r}$, so ist $a : b = n : r$. Z. B. $\frac{12}{3} = \frac{8}{2}$, also $12 : 8 = 3 : 2$.

Beweis. Weil $a = \frac{b}{r} \times n$ (§. 87.) $= \frac{bn}{r}$, $= b \times \frac{n}{r}$ (§. 176.), so ist im Verhältnisse $a : b$ der

Expo-

Exponent $= \frac{n}{r}$ (§. 337.); im Verhältnisse n : r aber ist derselbe ebenfalls $= \frac{n}{r}$ (§. 340.). Also a : b = n : r (§. 346.).

§. 363. Geometrische Proportion. Vorhergehende, nachfolgende Glieder; äußerste, mittlere Glieder; mittlere geometrische Proportionalgröße. Stetige, unterbrochene geometrische Proportion.

Erklär. Die Gleichheit zweyer geometrischen Verhältnisse heißt eine geometrische Proportion, nämlich wenn a : b = c : d, so sagt man: die vier Größen, a, b, c, d, stehen in der Ordnung, wie sie hier folgen, in einer geometrischen Proportion, oder sie sind geometrisch proportional. Das erste und dritte Glied, a, c, heißen die vorhergehenden, das zweyte und vierte, b, d, die nachfolgenden. Das erste und vierte, a, d, heißen die beiden äußersten; das zweyte und dritte, b, c, die beiden mittleren. Sind die beiden mittleren Glieder gleich, z. B. wenn a : b = b : c ist, so heißt die Proportion eine stetige, und das mittlere Glied b, welches zweymal vorkommt, heißt die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen den beiden äußersten a und c. Sind dagegen die beiden mittleren Glieder ungleich, z. B. wenn a : b = c : d, so heißt die Proportion eine unterbrochene oder discrete. Z. B. 3 : 6 = 6 : 2 ist eine stetige, und 3 : 6 = 4 : 8 ist eine discrete geometrische Proportion.

§. 364.

Zus. Wenn daher in der Proportion a : b = c : d für das eine Verhältniß, z. B. a : b, der Expo-

Exponent = m angenommen wird, so ist er für das andere, c:d, ebenfalls = m (§. 346.), also a = mb, und c = md (§. 338.), dagegen $b = \frac{1}{m} a$, und $d = \frac{1}{m} c$ (§. 339.). Z. B. wenn 3:6 = 4:8 ist, so ist für die erstern Verhältnisse sowohl, als für die letztern, der Exponent $\frac{1}{2}$; und 6 = 2.3, so wie 8 = 2.4.

§. 365.

Zus. Wenn in einer Proportion die vorhergehenden Glieder gleich sind, so sind auch die nachfolgenden gleich; und wenn die nachfolgenden gleich sind, so sind auch die vorhergehenden gleich, d. i. wenn a:b = a:c, so ist b = c; und wenn a:b = c:b, so ist a = c. Denn da a = mb, und a = mc (§. 364.), so ist mb = mc, also b = c (§. 87. 91.), und da c = mb, so ist a = c (§. 7.). Z. B. $3 : \frac{2}{3} = 3 : \frac{4}{6}$, also $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, und so hinwiederum.

§. 366.

Lehrsatz. Wenn in einer Proportion a:b = c:d die Glieder des einen Verhältnisses gleich sind, so sind auch die Glieder des andern gleich. Ist dagegen in dem einen Verhältnisse das Vorderglied größer oder kleiner, als das Hinterglied, so gilt dieses auch vom andern; d. i. wenn a = b, so ist c = d. Wenn $a > b$, so ist $c > d$, und wenn $a < b$, so ist $c < d$. Z. B. $3:4 = \frac{12}{4} : \frac{8}{2}$, oder 6:2 = 9:3, desgleichen 2:6 = 3:9.

Beweis. Wenn man den Exponenten = m setzt, so ist a = mb, und c = md (§. 364.). Ist daher a = b, so ist mb = b, folglich weder $m > 1$, noch

noch $m < 1$, denn sonst müßte im ersten Fall $mb > b$, und im letztern $mb < b$ seyn; mithin ist $m = 1$ (§. 18.), also $c = d$ (§. 74.). Ist dagegen $a > b$, d. i. $mb > b$, so ist weder $m = 1$, denn sonst wäre $mb = b$ (§. 74.), noch $m < 1$, denn sonst wäre $mb < b$; also ist nicht $m > 1$, folglich $md > d$; mithin $c > d$. Ist endlich $a < b$, d. i. $mb < b$, so ist weder $m = 1$, weil sonst $mb = b$ wäre; noch $m > 1$, weil sonst $mb > b$ wäre, also ist $m < 1$, folglich $md < d$, also $c < d$.

§. 367.

Lehrs. Jede geometrische Proportion läßt sich umkehren, d. i. wenn $a:b = c:d$ ist, so ist *invertendo* auch $b:a = d:c$; oder $d:c = b:a$. Z. B. wenn $3:4 = 6:8$, so ist auch $4:3 = 8:6$, oder $8:6 = 4:3$.

Beweis. Man setze den Exponenten $= m$, so ist $b = \frac{1}{m}a$, und $d = \frac{1}{m}c$ (§. 364.), folglich haben die Verhältnisse $b:a$ und $d:c$ einerley Exponenten $\frac{1}{m}$ (§. 337.), also ist $b:a = d:c$; ingleichen $d:c = b:a$ (§. 346.).

§. 368.

Lehrs. In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden erstern Glieder zum zweyten Gliede, wie die Summe oder Differenz der beiden letztern zum vierten, d. i. wenn $a:b = c:d$, so ist auch *componendo* $a + b : b = c + d : d$, und *dividendo* $a - b : b = c - d : d$. Z. B. wenn $4:3 = 8:6$, so ist auch $4 + 3 : 3 = 8 + 6 : 6 = 7 : 3 = 14 : 6$, und $1 : 3 = 2 : 6$.

Be-

Beweis. Weil $a = mb$, und $c = md$ (§. 364.), so ist: 1) $a + b = mb + b$ (§. 29.) $= (m + 1)b$ (§. 75. 77.), und $c + d = md + d$ (§. 29.) $= (m + 1)d$ (§. 75. 77.). Also $a + b : b = c + d : d$ (§. 346.).

2) $a - b = mb - b$ (§. 42.) $= (m - 1)b$ (§. 76. 77.) und $c - d = md - d$ (§. 42.) $= (m - 1)d$ (§. 76. 77.). Also $a - b : b = c - d : d$. (§. 346.).

§. 369.

Lehrs. In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zum erstern, wie die Summe oder Differenz der beiden letztern Glieder zum dritten, d. i. wenn $a : b = c : d$, so ist auch *convertendo* $a + b : a = c + d : c$; imgleichen $a - b : a = c - d : c$. Z. B. wenn $6 : 4 = 12 : 8$, so ist auch $6 + 4 : 6 = 12 + 8 : 12 = 10 : 6 = 20 : 12$, imgleichen $2 : 6 = 4 : 12$.

Beweis. Weil $b = \frac{1}{m} a$, und $d = \frac{1}{m} c$ (§. 364.), so ist: 1) $a + b = a + \frac{1}{m} a$ (§. 29.) $= (1 + \frac{1}{m}) a$ (§. 75. 77.) und $c + d = c + \frac{1}{m} c$ (§. 29.) $= (1 + \frac{1}{m}) c$ (§. 75. 77.). Also $a + b : a = c + d : c$ (§. 346.).

2) $a - b = a - \frac{1}{m} a$ (§. 42.) $= (1 - \frac{1}{m}) a$ (§. 76. 77.) und $c - d = c - \frac{1}{m} c$ (§. 42.) $=$

(1 —

$(1 - \frac{1}{m})c$ (§. 76. 77.). Also $a - b : a = c - d : c$ (§. 346.).

§. 370.

Lehrs. Wenn alle Glieder einer geometrischen Proportion gleichartig sind, so läßt sich das zweyte und dritte Glied verwechseln, d. i. wenn in diesem Falle $a : b = c : d$ ist, so ist *vicissim s. permutando* auch $a : c = b : d$. Z. B. wenn $6 : 4 = 12 : 8$, so ist auch $6 : 12 = 4 : 8$.

Beweis. Weil $a = mb$, und $c = md$ (§. 364.), so ist $a : c = mb : md$ (§. 6.) $= b : d$ (§. 353.).

§. 371.

Lehrs. Wenn alle Glieder einer geometrischen Proportion gleichartig sind, so verhält sich die Summe oder Differenz der vorhergehenden Glieder zur Summe oder Differenz der nachfolgenden, wie das erste zum zweyten; d. i. wenn in diesem Falle $a : b = c : d$ ist, so ist *antecedentes et consequentes summando* $a + c : b + d = a : b$, und *anteced. et consequ. differentiando*, $a - c : b - d = a : b$. Z. B. wenn $12 : 8 = 6 : 4$, so ist auch $18 : 12 = 12 : 8$, oder $6 : 4 = 12 : 8$.

Beweis. Weil hier $a : c = b : d$ (§. 370.), so ist $a + c : a = b + d : b$, und $a - c : a = b - d : b$ (§. 369.), also $a + c : b + d = a : b$, und $a - c : b - d = a : b$ (§. 370.). Eben so ist hier auch $a + c : b + d = a - c : b - d$ (§. 348.). Z. B. $18 : 12 = 6 : 4$.

§. 372.

Lehrs. Wenn in einer geometrischen Proportion die Glieder des einen Verhältnisses Zahlen sind, so ist das Product der beiden äußersten Glieder dem

Product der beiden mittleren gleich; d. i. wenn $a:b = n:r$, so ist $ar = bn$, z. B. wenn $a:b = 4:7$, so ist $7a = 4b$, oder wenn $3:4 = 6:8$, so ist $3.8 = 4.6 = 24$.

Beweis. Man setze den Exponenten $= m$, so ist $a = mb$, und $n = mr$ (§. 364.), folglich $ar = rmb$, und $nb = mrb$ (§. 71.) $= rmb$ (§. 79.), also $ar = nb$ (§. 7.).

§. 373.

Zus. Also ist in einer stetigen Proportion, in welcher alle Glieder Zahlen sind, das Product der beiden äußersten dem Quadrate des mittleren gleich, d. i. wenn $n:u = u:r$, so ist $nr = u^2$ (§. 249.). Z. B. wenn $5:20 = 20:80$, so ist $80 \times 5 = 20 \times 20 = 20^2$.

§. 374.

Lehrs. Wenn das Product der beiden äußersten Glieder dem Product der beiden mittlern gleich ist, so sind die Glieder in einer geometrischen Proportion, d. i. wenn $ar = bn$, so ist $a:b = n:r$. Z. B. wenn $7a = 4b$, so ist $a:b = 4:7$, oder weil $3 \times 8 = 4 \times 6$, so ist $3:4 = 6:8$.

Beweis. Weil nach der Voraussf. $ar = bn$, so ist $a = \frac{bn}{r}$ (§. 87.) $= \frac{n}{r} b$ (§. 176.), also $a:b = \frac{n}{r} : 1$ (§. 349.) $= n:r$ (§. 350.).

§. 375.

Zus. Wenn daher eine Quadratzahl einem Producte zweyer Zahlen gleich ist, so ist ihre Wurzel die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen ihnen, d. i. wenn $u^2 = nr$ ist, so ist $n:u = u:r$.

§. 376.

§. 376.

Aufgabe. Zu drey gegebnen Zahlen, m, n, r, die vierte geometrische Proportionalzahl x zu finden.

Auflös. Man multiplicire die zweyte durch die dritte, und dividire das Product durch die erste, d. i. $x = \frac{nr}{m}$, z. B. wenn $2:7 = 5:x$ seyn soll, so ist $x = \frac{7 \cdot 5}{2} = \frac{35}{2}$.

Beweis. Wenn $x = \frac{nr}{m}$, so ist $mx = nr$ (§. 87.), also $m:n = r:x$ (§. 374.).

§. 377.

Aufgabe. Zwischen zwey gegebnen Zahlen n und r die mittlere geometrische Proportionalzahl u zu finden.

Auflös. Man ziehe aus dem Product der beiden gegebnen Zahlen die Quadratwurzel, d. i. $u = \sqrt{nr}$. Z. B. die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 4 und 16 ist $\sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64} = 8$, und die zwischen 1 und 2 ist $\sqrt{2}$.

Beweis. Denn wenn $u = \sqrt{nr}$, so ist $u^2 = nr$ (§. 249.), also $n:u = u:r$ (§. 375.).

§. 378.

Lehrs. Vier gezählte Größen sind in einer geometrischen Proportion, wenn ihre Coefficienten, d. i. die Zahlen, die vor ihnen stehen, in einer geometrischen Proportion sind, d. i. wenn $m:n = r:x$, so ist $ma:na = rb:xb$. Z. B. wenn $4:7 = 12:x$, so ist auch 4 Pf. : 7 Pf. = 12 Rthlr. : x Rthlr.

Beweis. Weil $m:n = ma:na$ (§. 354.), und $m:n = r:x$ nach der Voraussetz., so ist $ma:na$

 = r

$= r : x$ (§. 348.). Nun ist $r : x = rb : xb$ (§. 354.), also $ma : na = rb : xb$ (§. 348.).

§. 379.

Aufgabe. Zu drey gezählten Größen, ma, na und rb, die vierte geometrische Proportionalgröße xb zu finden.

Auflös. Man suche zu den Zahlen m, n und r der drey gegebnen Größen die vierte geometrische Proportionalzahl $x = \frac{nr}{m}$ (§. 376.), so ist diese die Zahl der gesuchten vierten Größe, d. i. $xb = \frac{nr}{m} b$. Z. B. wenn 4 Pf. : 7 Pf. = 12 Rthlr. : x Rthlr. seyn soll, so ist x Rthlr. $= \frac{7 \cdot 12}{4}$ Rthlr. = 21 Rthlr.

Beweis. Denn da $m : n = r : x$, so ist $ma : na = rb : xb$ (§. 378.).

§. 380.

Aufgabe. Zwischen zwey gleichartigen gezählten Größen na und ra die mittlere geometrische Proportionalgröße ua zu finden.

Auflös. Man suche zwischen den Zahlen n und r der beiden gegebnen Größen die mittlere geometrische Proportionalzahl $u = \sqrt{nr}$ (§. 377.), so ist diese die Zahl der gesuchten Größe, d. i. $ua = a\sqrt{nr}$. Z. B. wenn man zwischen zwey Linien von 4 Zoll und 16 Zoll die mittlere geometrische Proportionallinie finden soll, so ist diese $= \sqrt{64}$ Zoll = 8 Zoll.

Beweis. Weil $n : u = u : r$, so ist $na : ua = ua : ra$ (§. 378.).

§. 381.

Anmerkung. Diese drey letztern Sätze decken nun die Nichtigkeit der vermeinten Multiplication und

und Division durch Größen, die nicht bloße Zahlen sind, völlig auf. Was konnte wol die Erdichtung dieser sonderbaren Begriffe veranlassen? In der allgemeinen Mathesis ohne Zweifel nichts anders, als die Aufgabe in den §§. 379. und 380.: zu drey gezählten Größen die vierte, und zwischen zweyen die mittlere geometrische Proportionalgröße zu finden; denn sonst findet sich in der ganzen allgemeinen Mathesis nichts, was irgend einen Mathematiker zu dieser Erdichtung hätte nöthigen sollen. Man stellte sich nämlich vor, (und dieses geschieht noch alle Tage,) daß man z. B. in der Proportion: 4 Pf. : 7 Pf. = 12 Rthlr. : x Rthlr., das letzte Glied nicht anders bekommen könnte, als wenn man die 12 Rthlr. durch 7 Pf. multiplicirte, und das Product durch 4 Pf. dividirte. Nun erdachte man sich hier zwey ganz entgegengesetzte Wege. Der Arithmetiker erweiterte die Begriffe der Multiplication und Division, wie bey §§. 354. und 358. ist bemerkt worden, und so gaben ihm 12 Rthlr. durch 7 Pf. multiplicirt, das Product 84 Rthlr., und dieses durch 4 Pf. dividirt, die verlangte Größe 21 Rthlr. Der Geometer hingegen, dem es vorkam, daß er dem Product zweyer Zahlen, welches Euklides im arithmetischen Sinn ein Rechteck nennt, füglich das Product der Seiten eines geometrischen Rechtecks substituiren könnte, glaubte hier die vollkommenste Bestätigung seiner Meinung zu sehen, ihm gaben daher die 12 Rthlr. durch 7 Pf. multiplicirt, zum Product ein gewisses undenkbares, mit dem Multiplicand ungleichartiges Ding: 84 Rthlr. Pf., das aus Pfund und Thaler zusammengesetzt seyn soll, und dieses durch 4 Pf. dividirt, bekam er ebenfalls 21 Rthlr., weil Pf. durch Pf. dividirt, nach seiner Meinung 1 geben, folglich die Producte 84 Rthlr. Pf. die Größe: Pf. aufheben müßte. Allein man übersahe hierbey den so leichten als klaren

Satz §. 378., daß vier gezählte Größen einander proportional sind, wenn dieses von den Zahlen, die vor ihnen stehen, gilt, und daß man also gar nicht nöthig habe, die 12 Rthlr. mit den 7 Pf. zu multipliciren, und durch die 4 Pf. zu dividiren, sondern blos 12 durch 7 multipliciren, und das Product 84 durch 4 dividiren, oder, welches auf eins hinausläuft, die 12 Rthlr. durch den umgekehrten Exponenten $\frac{7}{4}$ multipliciren dürfe, um die vierte Proportionalgröße 21 Rthlr. zu erhalten.

Dieses ist zugleich der wahre Grund, woher man in der höhern Mathematik befugt ist, mit den Größen überhaupt völlig so zu rechnen, als ob es bloße Zahlen wären. Wenn man nämlich zu drey Größen, a, b, c, die vierte Proportionalgröße x verlangt, so kann man diese auf eine arithmetische Art, d. i. durch Rechnung, nicht eher finden, als bis man die Größen, a, b, in gezählte: ng, rg, verwandelt, die nach einerley beliebigem Maaße gemessen sind, alsdenn bekommt man $x = \frac{rc}{n}$ (§. 379.). Da es also einerley ist, ob man x als die vierte Proportionalgröße zu a, b, c, oder zu n, r, c ansieht, und durch die Größen, a, b, zugleich die Zahlen r, n gegeben sind, so kann man allemal $x = \frac{bc}{a}$ setzen, wofern man sich nur bewußt bleibt, daß die Größen b, a, hier nichts weiter, als die Zahlen r, n vorstellen, die man jedesmal finden, und in ihre Stelle setzen kann, so bald man die Größen, a, b, durch irgend ein gemeinschaftliches Maaß g mißt, und sie dadurch in gezählte Größen verwandelt. Z. B. es sey a eine Linie von gewisser Größe, und b eine von einer andern Größe, so kann man die erste Linie a durch 3 Fuß, und die andere b durch 4 Fuß ausdrücken,

drücken, so daß g hier Fuß, $n = 3$ und $r = 4$, folglich $ng = 3$ Fuß, und $rg = 4$ Fuß ist. Auf diese Art zeigt einestheils der Ausdruck $x = \frac{bc}{a}$ allemal an, daß x die vierte Proportionalgröße zu a, b, c sey, und anderntheils kann man die Größen a, b völlig als Zahlen behandeln, d. i. durch sie multipliciren, dividiren, sie zu Potenzen erheben, Wurzeln aus ihnen ausziehen u. s. w., indem sie in der That nichts anders, als die vorhin gedachten Zahlen n, r vorstellen. Eben daher zeigt der Ausdruck $y = \frac{ebc}{da}$ an, daß y die vierte Proportionalgröße zu d, e, und $\frac{bc}{a}$ oder dem vorigen x, sey; und e, d stellen hier wieder zwey Zahlen, u, v, vor, die man bekommt, wenn man e, d in gezählte Größen verwandelt, so daß $y = \frac{ebc}{da}$ eben so viel heißt, als $y = \frac{vrc}{un}$. Z. B. es seyen a und b ein paar Capitalien, so daß $a =$ 300 Rthlr. und $b =$ 400 Rthlr., wo also $n = 300$, $g =$ Thaler, und $r = 400$, g wieder = Thaler. Nun setze man, das erste sey eine gewisse Zeit auf Zins geliehen gewesen, und das andere auch auf eine gewisse andere Zeit, so daß diese Zeiten durch e und d ausgedruckt sind, wo $e = 2$ Jahre und $d = 5$ Jahre. Es ist also hier $u = 2$ und $v = 5$, und das gemeine Maaß = Jahr, welches man durch einen Buchstaben, wie vorhin g bey den Thalern, ausdrücken könnte. Hätte nun das erste Capital 300 Rthlr. in 2 Jahren 30 Rthlr. Zins = c gebracht, so würde man y oder den Zins der 400 Rthlr. in den 5 Jahren durch $\frac{5 . 400 . 30}{2 . 11 . 300}$ oder $y = 100$ Rthlr. ausdrücken.

§. 382.

Lehrsatz. Wenn eine Größe A mit irgend einer andern B in solcher Verbindung steht, daß jeder Theil a, den man in A annimmt, einen gewissen Theil b in B giebt, und zwar so, daß ma allemal mb giebt, man mag die ganze Zahl m so groß annehmen, als man will, so giebt auch $\frac{n}{m}$a allemal $\frac{n}{m}$b. Z. B. wenn ein Pfund Gewürz 8 Rthlr. kostet, und m Pf. m mal 8 Rthlr., oder 3 Pf. 3mal 8 Rthlr. kosten, so müssen $\frac{n}{m}$ Pf. auch $\frac{n}{m}$ Rthlr. kosten; oder, wenn n = 6 wäre, so müssen $\frac{6}{3} = 2$ Pf. auch $\frac{6}{3} =$ 2 Rthlr. kosten.

Beweis. Man setze, $\frac{1}{m}$a gebe den Theil d, so giebt m . $\frac{1}{m}$a den Theil md nach der Vorauss., d. i. a giebt md (§. 85.). Nun aber giebt a den Theil b nach der Vorauss., folglich ist md = b, folglich d = $\frac{1}{m}$b (§. 85.); mithin giebt $\frac{1}{m}$a den Theil $\frac{1}{m}$b, also giebt n . $\frac{1}{m}$ a den Theil n . $\frac{1}{m}$ b nach der Vorauss., d. i. $\frac{n}{m}$ a giebt $\frac{n}{m}$ b (§. 153.).

§. 383.

Lehrs. Wenn eine Größe A mit irgend einer andern B in solcher Verbindung steht, daß jeder Theil a, den man in A annimmt, einen gewissen Theil b in B giebt,

giebt, und zwar so, daß ma allemal $\frac{1}{m}b$ giebt, so giebt $\frac{n}{m}a$ allemal $\frac{m}{n}b$.

Z. B. wenn ein Körper einen Raum mit der Geschwindigkeit c in 1 Stunde, und mit der mfachen Geschwindigkeit: mc, denselben in $\frac{1}{m}$ Stunde durchläuft, so durchläuft er ihn mit der Geschwindigkeit $\frac{n}{m}c$, in $\frac{m}{n}$ Stunden. Oder, wenn ein Körper einen Raum mit der Geschwindigkeit 10 in einer Stunde, und mit der 3fachen Geschwindigkeit 30 denselben in $\frac{1}{3}$ Stunde durchläuft, so durchläuft er ihn mit der Geschwindigkeit $\frac{6}{3} . 10 = 20$ in $\frac{3}{6}$ Stunden, d. i. in einer halben Stunde.

Beweis. Man setze, $\frac{1}{m}a$ gebe d, so giebt $m . \frac{1}{m}a$ den Theil $\frac{1}{m}d$ nach der Vorauss., d. i. a giebt $\frac{1}{m}d$. Nun aber giebt a den Theil b nach der Vorauss., folglich ist $\frac{1}{m}d = b$, folglich $d = mb$, mithin giebt $\frac{1}{m}a$ den Theil mb, also giebt $n . \frac{1}{m}a$ den Theil $\frac{1}{n} . mb$ nach der Vorauss., d. i. $\frac{n}{m}a$ giebt $\frac{m}{n}b$.

§. 384.

Lehrs. Wenn eine Größe A mit irgend einer andern B in solcher Verbindung steht, daß jeder Theil der einen, einen gewissen Theil der andern giebt, und zwar so, daß jeder vielfache Theil der einen, einen gleich vielfachen Theil der andern giebt; so sind jede zwey Theile der einen Größe den correspondirenden Theilen der andern proportional, d. i. wenn a in A den Theil b in B, und ma allemal mb giebt, so ist, wenn α den Theil β giebt, allemal $a : \alpha = b : \beta$, das Verhältniß $a : \alpha$ mag rational, oder irrational seyn.

Z. B. wenn eine Waare mit ihrem Preis in solcher Verbindung steht, daß 3 Pf. von der Waare 4 Rthlr. kosten, und 2mal 3 Pf. allemal 2mal 4 Rthlr. giebt, so ist, wenn 9 Pf. 12 Rthlr. kosten, 3 Pf. : 9 Pf. = 4 Rthlr. : 12 Rthlr.

Beweis. Da sich im Verhältnisse $a : \alpha =$, es mag rational, oder irrational seyn, der Exponent allgemein durch einen Bruch $\frac{m}{n}$ ausdrücken läßt (§. 342.), so ist $\alpha = a : \frac{m}{n}$ (§. 339.) $= \frac{n}{m} a$ (§. 178.). Nun giebt a den Theil b, und ma giebt mb nach d. Vorauss., folglich giebt $\frac{n}{m} a$ den Theil $\frac{n}{m} b$ (§. 382.), d. i. α giebt $\frac{n}{m} b$. Allein α giebt den Theil β nach d. Vorauss., folglich ist $\beta = \frac{n}{m} b$. Da nun $a : \frac{n}{m} a = b : \frac{n}{m} b$ (§. 351.), so ist $a : \alpha = b : \beta$.

§. 385.

Lehrs. Wenn eine Größe A mit irgend einer andern B in solcher Verbindung steht, daß jeder Theil der ersten einen gewissen Theil der andern, und jeder vielfache Theil der ersten einen gleich vielmal kleinern Theil der andern giebt, so sind jede zwey Theile der ersten den correspondirenden Theilen der andern umgekehrt proportional, d. i. wenn a den Theil b, und ma allemal $\frac{1}{m}b$ giebt, so ist, wenn α den Theil β giebt, allemal $a : \alpha = \beta : b$.

Z. B. wenn die Zeit einer Arbeit mit der Anzahl der Arbeiter, durch welche sie verrichtet wird, in solcher Verbindung steht, daß zu 3 Wochen 24 Arbeiter gehören, und zu 2mal 3 Wochen nur $\frac{1}{2}$mal 24 Arbeiter gehören, so ist, wenn in 9 Wochen 8 Arbeiter nöthig sind, 3 Wochen zu 9 Wochen = 8 Arbeiter zu 24 Arbeiter.

Beweis. Weil im Verhältnisse $a : \alpha$ der Exponent $= \frac{m}{n}$ ist (§. 342.), so ist $\alpha = a : \frac{m}{n}$ (§. 339.) $= \frac{n}{m}a$ (§. 178.). Nun giebt a den Theil b, und ma giebt $\frac{1}{m}b$ nach d. Voraussf., folglich giebt $\frac{n}{m}a$ den Theil $\frac{m}{n}b$ (§. 383.), d. i. α giebt $\frac{m}{n}b$. Allein α giebt β nach d. Voraussf., folglich ist $\beta = \frac{m}{n}b$. Da nun $a : \frac{n}{m}a = b : \frac{n}{m}b$ (§. 351.) $= \frac{m}{n}b : b$ (§. 346.), so ist $a : \alpha = \beta : b$.

§. 386. Regel de tri.

Erklärung. Die Vorschrift, wie man zu drey gegebnen gezählten Größen die vierte geometrische Proportionalgröße finden kann, heißt die Regel de tri (Regula de tribus numeris), welche auf folgende Art ausgedruckt wird: man multiplicire die Zahl der dritten Größe durch die Zahl der zweyten, und dividire das Product durch die Zahl der ersten, so hat man die Zahl für die verlangte vierte Proportionalgröße (§. 376. 379.).

§. 387. Güldene Regel, gerade, ordentliche, verkehrte.

Anmerkung. Diese Regel ist von so ausgebreitetem Nutzen, daß die Fälle, in welchen ihre Anwendung stattfindet, sowohl in der Mathematik, als im gemeinen Leben unzählbar sind, daher pflegt man sie auch die güldene Regel zu nennen. Ihr Gebrauch in der Mathematik wird in jeder mathematischen Disciplin besonders gezeigt. Ihre Anwendung aber auf Rechnungsfragen, die im gemeinen Leben vorkommen, gehört nicht in die reine Arithmetik, sondern in die practische oder angewandte Rechenkunst. Indessen wird es nicht undienlich seyn, ihren Gebrauch auch hier in einigen Hauptfällen deutlich zu machen. Die Regel selbst ist deutlich und leicht; da sie aber nicht anders anwendbar ist, als wenn die drey gegebnen Größen mit der vierten eine geometrische Proportion machen, so kommt es bey ihrem Gebrauch hauptsächlich auf die Beurtheilung an: ob die Größen von der Art sind, daß jede zwey Theile der einen, zweyen Theilen der andern proportional sind, und in welcher Ordnung die Glieder dieser Proportion folgen müssen. Dieses läßt sich nun aus den in den §§. 384. und 385. angegebnen Kennzeichen der Proportionalität in jedem vorkommenden Falle leicht beur-

beurtheilen. Denn man darf nur überlegen, ob jeder Theil der einen Größe, der einen gewissen Theil der andern giebt, n mal genommen, auch den andern n mal, oder den nten Theil von ihm, oder keins von beiden giebt. Im letzten Falle findet die Regel de tri gar nicht statt. Z. B. wenn aus einem Gefäße in einer Secunde ein Maaß Wein ausläuft, so laufen in n Secunden nicht immer n Maaße, und noch weniger $\frac{1}{n}$ Maaß, heraus; d. i. wenn in 1 Secunde 2 Maaß herausgelaufen sind, da das Faß voll war, so werden in 1 Min. oder 60 Sec. nicht 60mal 2 = 120 Maaß, sondern weit weniger auslaufen, weil die Geschwindigkeit mit der Abnahme des Drucks vermindert wird. Also kann hier die Frage: wie viel Maaß in 60 Secunden auslaufen, nicht unmittelbar durch die Regel de tri berechnet werden. Im erstern Fall, wenn ein n mal größerer Theil der einen Größe auch immerfort einen n mal größern der andern giebt, so verhält sich allemal der Theil a zum Theil α der einen Größe, wie in der andern der Theil b, den a giebt, zum Theil β, den α giebt (§. 384.). Z. B. bey einer Waare, die durchgehends von gleicher Güte ist, muß billig eine n mal größere Menge auch n mal mehr gelten; also verhält sich hier allemal eine gewisse Menge der Waare zu einer andern Menge derselben, wie der Preis der erstern zum Preise der andern. Im zweyten Falle aber, wenn ein n mal größerer Theil der einen Größe jedesmal einen n mal kleinern in der andern giebt, so verhält sich allemal der Theil a zum Theil α in der einen Größe, wie in der andern der Theil β, den α giebt, zum Theil b, den a giebt (§. 385.). Z. B. wenn alle Arbeiter bey einem Werke gleich geschwinde verfahren, so brauchen n mal mehr Arbeiter n mal weniger Zeit; also verhält sich hier eine gewisse Menge Arbeiter zu einer andern Menge der-

derselben allemal, wie die Zeit, welche die leztern brauchen, zur Zeit, welche die erstern nöthig haben. Wenn man auf diese Art verfährt, so kann man jedesmal mit Sicherheit einsehen, theils ob sich die Regel de tri anbringen läßt, theils wie die Glieder der Proportion zu ordnen sind; ob nemlich die Theile der einen Größe sich ordentlich wie die correspondirenden Theile der andern verhalten, oder ob eins von diesen Verhältnissen umgekehrt werden muß, um die Proportion zu bekommen. Im erstern Falle pflegt man die Regel de tri die ordentliche (directa), im leztern die verkehrte (inversa) zu nennen. Allein diese Eintheilung betrifft gar nicht die Regel de tri selbst, sondern blos die Art, wie die gegebnen Größen in der Proportion zu ordnen, oder nach der Anordnung weiter zu behandeln sind. Denn, wenn man bey einer zur verkehrten Regel de tri gehörigen Aufgabe die gegebenen Größen so ordnet, wie es bey der ordentlichen gewöhnlich ist, so verlangt man izt, daß nicht die beiden lezten, sondern die beiden ersten in einander multiplicirt, und das Product durch die lezte soll dividirt werden.

Zur sogenannten ordentlichen Regel de tri gehören unter andern:

1) **Die Berechnung der Waaren und Preise.** Denn n mal mehr Waare giebt n mal mehr Preis; also verhalten sich die Preise wie die Waaren.

Exempel: 5 Pf. kosten 6 Rthlr., wie viel Pf. bekommt man für 19 Rthlr.?

6 Rthlr. : 19 Rthlr. = 5 Pf. : $\frac{19 \cdot 5}{6}$, d. i. $15\frac{5}{6}$ Pf.

2) **Die Zinsrechnung.** Ein n mal größeres Capital trägt in derselben Zeit n mal mehr Zinsen,

und

und in einer n mal größern Zeit trägt dasselbe Capital gleichfalls n mal mehr Zinsen, also verhalten sich für einerley Zeit die Capitalien wie die Zinsen; und für einerley Capital verhalten sich die Zinsen wie die Zeiten der Ausleihung.

Exempel: Wie viel Interessen tragen jährlich 8320 fl., wenn 100 fl. jährlich 5 fl. tragen?

100 fl. : 8320 fl. = 5 fl. : $\frac{8320 \cdot 5}{100}$ fl., d. i. 416 fl.

Oder: Wie viel Interessen bringt ein Capital in 20 Jahren, wenn es in einem Jahre 416 fl. bringt?

1 Jahr : 20 Jahr = 416 fl. : $\frac{20 \cdot 416}{1}$ fl., d. i. 8320 fl.

3) Die Verrichtung der Arbeiter, die Zeit, die sie zu einem Werke brauchen, und ihr Tagelohn. Denn n mal mehr Arbeiter verrichten n mal mehr, und in einer n mal größern Zeit wird auch ihr Werk und ihr Tagelohn n mal größer; also verhalten sich sowohl die Verrichtungen, als die Belohnungen, wie die Arbeiter, imgleichen wie die Zeiten.

Exempel: Eine Anzahl Arbeiter rücken in 3 Tagen mit einem Graben 70 Fuß fort, wie viel brauchen sie, um 520 Fuß fortzurücken?

70 Fuß : 520 Fuß = 3 Tage : $22\frac{2}{7}$ Tagen.

Oder: Wenn ein Mann jährlich 24 Rthlr. Sold bekommt, wie viel beträgt der Sold für 200000 Mann?

1 M. : 200000 M. = 24 Rthlr. : 4800000 Rthlr.

4) Die Reductionsrechnung, da man eine Größe in eine andere verwandelt. Z. B. Eine Last macht

macht 60 Scheffel, n Lasten machen n mal 60 Scheffel, also verhält sich 1 Last zu jeder Anzahl Lasten, wie 60 Scheffel zu den ihr zugehörigen Scheffeln. Ferner machen 13913 Pariser Fuß 14400 Rheinländische Fuß, und n mal mehr von jenen, n mal mehr von diesen; also verhalten sich 13913 Par. Fuß zu jeder andern Zahl derselben, wie 14400 Rheinl. Fuß zu der Zahl der Rheinl. Fuße, die jener zugehören.

Exempel: Wie viel Scheffel machen 38 Last?

1 Last : 38 Last = 60 Scheffel : 2280 Scheffel.

Oder: Wie viel Last machen 2280 Scheffel?

60 Scheffel : 2280 Scheffel = 1 Last : 38 Last.

Oder: Wie viel Rheinl. Fuß machen 124 Pariser Fuß?

13913 Par. F. : 124 Par. F. = 14400 Rheinl. F. : $128\frac{4736}{13913}$ Rheinl. F.

Zur verkehrten Regel de tri gehört unter andern:

1) Die Berechnung der Arbeiter und der Zeit, die zu einem Werke nöthig sind. Denn da n mal mehr Arbeiter n mal weniger Zeit brauchen, so verhalten sich die Arbeiter umgekehrt wie die Zeiten; also muß man hier das Verhältniß der beiden von den gegebnen Größen umkehren.

Exempel: Wenn 5 Arbeiter ein Werk in 18 Tagen verrichten, wie viel Tage sind für 7 Arbeiter nöthig? Wollte man hier setzen:

5 Arb. 18 Tage = 7 Arbeiter?

so müßte man das Facit so bestimmen, daß man die beiden ersten Zahlen in einander multiplicirte, und das Product durchs letzte dividirte: $\frac{5 \cdot 18}{7} = 12\frac{6}{7}$ Tage.

Mehr

Mehr methodisch verfährt man aber, wenn man lieber das Verhältniß umkehrt, und denn bey der allgemeinen Regel bleibt:

7 Arb. : 5 Arb. = 18 Tage : $12\frac{6}{7}$ Tagen.

Oder: Wie viel Arbeiter sind nöthig, wenn ein Werk, das 12 Arbeiter in 30 Tagen verrichten, in 8 Tagen fertig werden soll?

8 Tage : 30 Tagen = 12 Arb. : 45 Arb.

2) Die Berechnung, in wie viel Zeit ein gegebnes Capital eben so viel Interessen bringt, als ein anderes in einer gegebnen Zeit; imgleichen wie groß das erstere Capital seyn muß, wenn die Zeit für dasselbe gegeben ist. Denn ein n mal größeres Capital erfüllt diese Forderung in einer n mal kleinern Zeit; also verhalten sich hier die Capitalien umgekehrt wie die Zeiten, und man muß also wiederum das Verhältniß der gegebnen Größen umkehren.

Exempel: Wie lange müssen 780 Rthlr. außenstehen, wenn sie zu gleichen Procenten so viele Interessen bringen sollen, als 5000 Rthlr. in 5 Monaten?

780 Rthlr. : 5000 Rthlr. = 5 Mon. : $32\frac{2}{39}$ M.

Oder: Wie groß muß das Capital seyn, welches in 32 Monaten so viele Interessen giebt, als 5000 Rthlr. in 5 Monaten?

32 Mon. : 5 Mon. = 5000 Rthlr. : $781\frac{1}{4}$ Rthlr.

3) Die Berechnung der Länge der Zeuche von verschiedener Breite, die zu einerley Absicht gebraucht werden. Denn ein n mal breiteres Stück erfordert eine n mal kleinere Länge, also verhalten sich die Längen umgekehrt wie die Breiten.

Exempel: Wenn von einem Stück, welches $\frac{3}{4}$ Ellen breit ist, 6 Ellen zu einem Kleide gehören,

wie viel Ellen Unterzeug hat man nöthig, wenn dieses nur $\frac{5}{4}$ Ellen breit ist?

$\frac{5}{4}$ Br. : $\frac{7}{4}$ Br. = 6 Ell. Länge : $8\frac{2}{5}$ Ell. Länge.

§. 388.

Aufgabe. Eine gegebne Größe a so zu theilen, daß die Theile x, y, z u. s. w. den gegebnen gleichartigen Größen b, c, d u. s. w. proportional sind, d. i. daß $x : y = b : c$; $x : z = b : d$ u. s. w. sey.

Auflös. Man suche zu der Summe der gegebnen Größen $b + c + d$ ꝛc. zu jeder von ihnen und zur gegebnen Größe a, die vierte Proportionalgröße (§. 379.), so bekommt man jeden der gesuchten Theile, x, y, z u. s. w. Z. B. die Größe 60 soll nach der Proportion der Größen 2, 3 und 5 getheilt werden, so hat man

1) $10 : 2 = 60 : 12$,
2) $10 : 3 = 60 : 18$,
3) $10 : 5 = 60 : 30$,

also sind die gesuchten Größen 12, 18 und 30, welche sich eben so, wie 2, 3 und 5, zu einander verhalten.

Beweis. Wenn $b + c + d : b = a : x$; $b + c + d : c = a : y$, und $b + c + d : d = a : z$ ist, so ist, wenn man $c = nb$, $d = rb$ setzt (§. 337.), $b + c + d = b + nb + rb = (1 + n + r)b$, folglich $(1 + n + r)b : b = a : x$; $(1 + n + r)b : nb = a : y$; $(1 + n + r)b : rb = a : z$ (§. 6.), folglich

$$x = \frac{a}{1 + n + r}; \; y = \frac{na}{1 + n + r}; \; z = \frac{ra}{1 + n + r}$$

(§. 379.), also $x + y + z = \frac{a + na + ra}{1 + n + r}$

$= \frac{(1 + n + r)a}{1 + n + r} = a$ (§. 87.); imgleichen $x : y$

$= a$

$= a : na$ (§. 357.) $= b : nb$ (§. 351.) $= b : c$ (§. 354.), und $x : z = a : ra = b : rb = b : d$.

Die Art dieses Beweises zeigt übrigens von selbst, daß die gegebne Regel allgemein richtig ist, man mag die Größe a in so viele Theile theilen, als man will.

§. 389. Gesellschaftsrechnung; Vermischungsrechnung.

Anmerkung. Auf dieser Aufgabe beruhet unter andern:

1) Die Gesellschaftsrechnung (regula societatis), wo mehrere Personen ungleiche Capitalien zu einem Handel hergeben. Denn da auf eine n mal größere Einlage auch ein n mal größerer Gewinnst oder Verlust fallen muß, so sind die Gewinnste oder Verluste den Einlagen proportional.

Exempel: Drey Kaufleute gewinnen in der Handlung 4000 Rthlr. Der erste hat zu derselben 10000 Rthlr., der zweyte 7000 Rthlr., der dritte 3000 Rthlr. gegeben; wie viel bekommt jeder vom Gewinnste?

Da hier die Summe aller Einlagen 20000 Rthlr. beträgt, so ist

20000 : 10000 = oder 2 : 1 = } 4000 Rthlr. : 2000 Rthlr. d. ersten Gew.

Ferner: 20 : 7 = 4000 Rthlr. : 1400 Rthlr. Gew. d. 2ten.

20 : 3 = 4000 Rthlr. : 600 Rthlr. Gew. d. 3ten.

Summe aller Gewinnste 4000 Rthlr.

2) Die Vermischungsrechnung (regula alligationis), wo man eine Sache aus verschiedenen Bestandtheilen zusammensetzen soll, so daß diese in gegebnen Verhältnissen zu einander stehen.

Exempel: Wenn bey gutem Schießpulver zu 16 Loth Salpeter, 3 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel gehören, wie viel von jeder Art gehören zu 100 Pfund Schießpulver?

Da $16 + 3 + 2 = 21$ ist, so ist

$21 : 16 = 100$ Pf. : $76\frac{4}{21}$ Pf. Salpeter,
$21 : \ 3 = 100$ Pf. : $14\frac{6}{21}$ Pf. Kohlen,
$21 : \ 2 = 100$ Pf. : $9\frac{11}{21}$ Pf. Schwefel.

Summe 100 Pf. Schießpulver.

§. 390.

Lehrsatz. Wenn zwey Proportionen von der Art sind, daß die nachfolgenden Glieder der ersten die vorhergehenden in der zweyten werden, so verhält sich das erste Glied der ersten Proportion zum zweyten Gliede der zweyten, wie das dritte Glied der ersten zum vierten Glied der zweyten; d. i. wenn

$a : b = d : e$
und $b : c = e : f$ ist,

so ist (*ordinatim et ex aequo*) $a : c = d : f$.

Z. B. $2 : 3 = 8 : 12$
$3 : 4 = 12 : 16$

so ist $2 : 4 = 8 : 16$.

Beweis. Man setze für das Verhältniß $a : b$ den Exponenten $= m$, und für $b : c$ setze man ihn $= r$, so ist $a = mb$, $d = me$, und $b = rc$, $e = rf$ (§. 364.), folglich $a = mrc$, und $d = mrf$ (§. 71.), also $a : c = d : f$ (§. 346.).

§. 391.

Zus. Wenn daher $a : b = d : e$
und $c : b = f : e$ ist,

so ist $a : c = d : f$.

Denn hier ist $b : c = e : f$ (§. 367.).

§. 392.

§. 392.

Zus. Wenn $b:a = e:d$
und $b:c = e:f$ ist,

so ist $a:c = d:f$.

Denn hier ist $a:b = d:e$ (§. 367.).

§. 393.

Lehrsatz. Wenn in zwey Proportionen das zweyte Glied der ersten dem ersten Gliede der zweyten, und das dritte Glied der ersten dem vierten Gliede der zweyten gleich ist, so verhält sich das erste Glied der ersten zum zweyten Gliede der zweyten, wie das dritte Glied der zweyten zum vierten Gliede der ersten, d. i. wenn $a:b = e:d$
und $b:c = f:e$ ist,

so ist (*perturbate et ex aequo*) $a:c = f:d$.

Z. B. $2:3 = 8:12$
$3:4 = 6:8$

so ist $2:4 = 6:12$.

Beweis. Man setze für $a:b$ den Exponenten $= m$, und für $b:c = r$, so ist $a = mb$, $e = md$, und $b = rc$, $f = re$ (§. 364.), folglich $a = mrc$, und $f = rmd$ (§. 71.), also $a:c = f:d$ (§. 346.).

§. 394.

Lehrsatz. Wenn man in zwey Proportionen, von welchen wenigstens eine aus lauter Zahlen besteht, die Glieder der einen durch die Glieder der andern nach der Reihe multiplicirt, so sind auch die Producte in Proportion, d. i. wenn
$a:b = c:d$
und $m:n = r:u$ ist,

so ist $ma:nb = rc:ud$.

$$\begin{array}{ll} \text{Z. B.} & 3:4 = 6:8 \\ & \underline{2:5 = 8:20} \end{array}$$

so ist $6:20 = 48:160$.

Beweis. Man setze für $a:b$ den Exponenten $= v$, und für $m:n = p$, so ist $a = vb$, $c = vd$, und $m = pn$, $r = pu$ (§. 364.), folglich $ma = pnvb = pvnb$, und $rc = puvd = pvud$, also $ma:nb = rc:ud$ (§. 346.).

§. 395.

Zus. Wenn daher vier Zahlen in Proportion sind, so sind auch ihre Potenzen von gleichem Grade in Proportion, d. i. wenn $m:n = r:v$ ist, so ist $m^u:n^u = r^u:v^u$. Z. B. wenn $2:3 = 4:6$ ist, so ist auch $2^2:3^3 = 4^2:6^2$, d. i. $4:9 = 16:36$.

Denn $mm:nn = rr:vv$, folglich $mmm:nnn = rrr:vvv$ etc., also überhaupt $m^u:n^u = r^u:v^u$.

§. 396.

Zus. Wenn vier Potenzen von gleichem Grade in Proportion sind, so sind auch ihre Wurzeln in Proportion, d. i. wenn $m^u:n^u = r^u:v^u$ ist, so ist auch $m:n = r:v$. Denn man setze $m:n = r:z$, so ist $m^u:n^u = r^u:z^u$ (§. 395.), folglich $z^u = \frac{r^u n^u}{m^u}$, und $v^u = \frac{r^u n^u}{m^u}$ (§. 376.), mithin $z^u = v^u$ (§. 7.), also $z = v$ (§. 263.).

§. 397.

Lehrsatz. Wenn zwey Größen aus gleich vielen Theilen bestehen, und die Theile der ersten den Theilen der andern nach der Reihe proportional sind, so verhält sich die erste zu jedem ihrer Theile, wie die zweyte zu ihrem gleichvielsten Theile, d. i. wenn

A:B

$$A:B=a:b$$
$$B:C=b:c$$
$$C:D=c:d \text{ u. s. w.}$$

so ist $A+B+c+\ldots:A=a+b+c\ldots:a$,
imgl. $A+B+C+\ldots:B=a+b+c\ldots:b$
u. s. w.

Z. B. $1:2=3:6$
$2:4=6:12$
$4:8=12:24$

also $1+2+4:1=3+6+12:3$
oder $7:1=21:3$ u. s. w.

Beweis. Es ist $A+B:A=a+b:a$ (§. 369.) und $A+B:B=a+b:b$ (§. 368.). Da nun ferner $A:C=a:c$ (§. 390.), so ist $A+B:C=a+b:c$ (§. 390.), folglich $A+B+C:A+B=a+b+c:a+b$ (§. 369.), also $A+B+C:A=a+b+c:a$ (§. 390.); und da $A:B=a:b$ nach der Voraussf., so ist auch $A+B+C:C=a+b+c:c$ (§. 368.). Auf eben diese Art läßt sich der Beweis fortsetzen, wenn die beiden Größen aus vier, fünf, und überhaupt aus so vielen Theilen bestehen, als man will.

§. 398.

Zus. Sind daher beide Größen gleichartig, so verhalten sie sich, wie ihre gleichvielsten Theile; denn hier ist *permutando* $A+B+C+\ldots:a+b+c\ldots=A:a=B:b=C:c$ (§. 370.).

§. 399. Zusammengesetzte Verhältnisse.

Erklärung. Wenn zwey oder mehrere Verhältnisse so beschaffen sind, daß immer das Hinterglied des einen das Vorderglied im nächstfolgenden ist, so heißt das Verhältniß des ersten Gliedes zum letzten

aus allen diesen Verhältnissen, oder andern, die ihnen gleich sind, zusammengesetzt; d. i. wenn

$a:b = k:l$
$b:c = m:n$
$c:d = p:q$ u. s. w.

so heißt das Verhältniß $a:c$, aus den zwey Verhältnissen $a:b$ und $b:c$, oder $k:l$ und $m:n$ zusammengesetzt. Eben so sagt man, das Verhältniß $a:d$ sey aus den drey Verhältnissen $a:b$, $b:c$ und $c:d$, oder aus $k:l$, $m:n$ und $p:q$ zusammengesetzt. Die Bezeichnung der zusammengesetzten Verhältnisse ist folgende:

$$a:c \begin{Bmatrix} a:b \\ b:c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k:l \\ m:n \end{Bmatrix};$$

$$a:d \begin{Bmatrix} a:b \\ b:c \\ c:d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k:l \\ m:n \\ p:q \end{Bmatrix}.$$

Z. B. wenn $a:b = 2:3$
$b:c = 3:5$
$c:d = 5:7$

so ist $a:c \begin{Bmatrix} 2:3 \\ 3:5 \end{Bmatrix}$

und $a:d \begin{Bmatrix} 2:3 \\ 3:5 \\ 5:7 \end{Bmatrix}$.

§. 400. Vervielfachtes Verhältniß, duplicirtes, triplicirtes; subduplicirtes, subtriplicirtes.

Erklär. Wenn ein Verhältniß aus zwey gleichen Verhältnissen zusammengesetzt ist, so heißt es ein duplicirtes (ratio duplicata). Ist es aus drey gleichen zusammengesetzt, so heißt es ein triplicirtes (triplicata); d. i. wenn

$a:b = k:l$
$b:c = k:l$
$c:d = k:l$

so ist $a:c = \begin{Bmatrix} a:b \\ a:b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k:l \\ k:l \end{Bmatrix}$

und

und $a:d = \begin{Bmatrix} a:b \\ a:b \\ a:b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k:l \\ k:l \\ k:l \end{Bmatrix}$

oder $\begin{matrix} 1:2 \\ 2:4 \\ 4:8 \end{matrix} \quad 1:8 = \begin{Bmatrix} 1:2 \\ 1:2 \\ 1:2 \end{Bmatrix}.$

Hier stehen a, c im duplicirten, die Größen a, d aber im triplicirten Verhältnisse der Größen a, b, oder k, l. Das einfache Verhältniß a:b oder k:l aber heißt in Ansehung des duplicirten a:c das subduplicirte (subduplicata), und in Ansehung des triplicirten a:d das subtriplicirte (subtriplicata) u. s. w., und man sagt: die Größen a, b, oder k, l stehen im subduplicirten Verhältnisse der Größen a, c, und im subtriplicirten der Größen a, d.

§. 401.

Lehrsatz. Wenn das Verhältniß zweyer Größen aus Zahlenverhältnissen zusammengesetzt ist, so verhält sich die erste zur zweyten, wie das Product aller Vorderglieder zum Producte aller Hinterglieder in den einfachen Zahlenverhältnissen; d. i. wenn

$$a:b = k:l$$
$$b:c = m:n$$
$$c:d = p:q \text{ u. s. w.}$$

so ist $a:c = km:ln$

und $a:d = kmp:lnq$ u. s. w.

Z. B. wenn $a:b = 1:2$

$b:c = 2:6$

$c:d = 6:9$

so ist $a:c = 1.2:2.6 = 2:12$

$a:d = 1.2.6 = 2.6.9 = 12:108.$

Beweis. Weil $la = kb$, und $mc = nb$ (§. 372.), so ist $a = \frac{kb}{l}$, und $c = \frac{nb}{m}$ (§. 87.),

 folg-

folglich $a:c = \frac{kb}{l} : \frac{nb}{m}$ (§. 6.) $= \frac{k}{l} : \frac{m}{n}$ (§. 354.) $= km:nl$ (§. 361.). Da nun ferner $c:d = p:q$ nach der Vorauss., so ist auch $a:d = kmp:lnq$ (p. demonstr.), und so ist klar, daß der Satz allgemein richtig ist, das Verhältniß zweyer Größen mag aus so viel Zahlenverhältnissen zusammengesetzt seyn, als man will.

§. 402.

Zus. Wenn daher zwey Größen im duplicirten Verhältnisse zweyer Zahlen stehen, so verhalten sie sich wie die Quadratzahlen; stehen sie im triplicirten Verhältnisse zweyer Zahlen, so verhalten sie sich wie die Cubikzahlen u. s. w., d. i. wenn

$a:b = k:l$
$b:c = k:l$
$c:d = k:l$

so ist $a:c = k^2:l^2$
$a:d = k^3:l^3$ u. s. w.

Z. B. wenn $a:b = 2:3$
$b:c = 2:3$
$c:d = 2:3$
$d:e = 2:3$

so ist $a:c = 4:9$
$a:d = 8:27$
$a:e = 16:81$.

§. 403.

Zus. Wenn hingegen zwey Größen, a, b, im subduplicirten oder subtriplicirten etc. Verhältnisse zweyer Zahlen, r, u, stehen, so verhalten sie sich im ersten Falle wie die Quadratwurzeln, im zweyten, wie die Cubikwurzeln derselben u. s. w.

Denn wenn a, b im subduplicirten Verhältnisse von r, u stehen, so ist $r:u = \left\{\begin{matrix} a:b \\ a:b \end{matrix}\right\}$ (§. 400.). Nun setze man $a:b = k:l$, so ist $r:u = \left\{\begin{matrix} k:l \\ k:l \end{matrix}\right\}$ $= k^2:l^2$ (§. 402.), folglich $k:l = \sqrt{r}:\sqrt{u}$ (§. 396.), also $a:b = \sqrt{r}:\sqrt{u}$ (§. 348.).

Stehen a, b im subtriplicirten Verhältnisse, r, u, so ist $r:u = \left\{\begin{matrix} a:b \\ a:b \\ a:b \end{matrix}\right\}$. Setzt man wieder $a:b = k:l$, so ist $r:u = k^3:l^3$ (§. 402.), folglich $a:b = k:l = \sqrt[3]{r}:\sqrt[3]{u}$ (§. 396.).

§. 404.

Aufgabe. Wenn ma = nb; pb = qc; rc = td; ud = vc etc. ist, die gezählte Größe ze zu finden, die der gegebnen Größe wa gleich ist.

Auflös. Man schließe: mpru : nqtv = w : z, und suche z. Es bedeute z. B. a so viel als Thaler, und ma sey = 2 Rthlr., eben so nb = 3 Gulden, pb = 1 Gulden, qc = 16 ggr., rc = 2 ggr., td = 3 Mgr., 1 Mgr. = 8 pf., und wa = 1 Rthlr. Daß man also wissen will, wie viel Pfennige = ze in 1 Rthlr. = wa enthalten sind. Also:

$$2 . 1 . 2 . 1 : 3 . 16 . 3 . 8 = 1 : 288,$$

also sind in 1 Rthlr. 288 pf. enthalten.

Beweis. Weil $a:b = n:m$
$b:c = q:b$
$c:d = t:r$
$d:e = v:u$ (§. 374.)
so ist $a:e = nqtv:mpru$ (§. 401.), folglich $e:a = mpru:nqtv$ (§. 367.). Da nun $ze = wa$ seyn soll, so ist $e:a = w:z$ (§. 374.), folglich auch $mpru : nqtv = w : z$ (§. 348.). Da nun e, a und w bekannt sind, so hat man, wenn z gefunden ist, $ze = wa$ (§. 374.).

§. 405.

Aufgabe. Wenn ma : na = ke : ve
pb : qb = ve : we
rc : ſc = we : xe
td : ud = xe : ze u. ſ. w.
und die Zahlen m, p, r, t, n, q, ſ, u, nebſt k, gegeben ſind, die gezählte Größe ze zu finden.

Auflöſ. Man ſchließe: mprt : nqſu = k : z, und ſuche z (§. 376.). Es ſey z. B. ma = 1 Mgr., na = 3 Mgr., ke = 8 pf., ſo wird ve = $\frac{3 . 8}{1}$ pf. ſeyn (§. 379.); es ſey ferner pb = 2 ggr., qb = 16 ggr., ſo wird we = $\frac{3 . 8 . 16}{1 . 2}$ pf.; ferner rc = 1 fl., ſc = 3 fl., ſo wird xe = $\frac{3 . 8 . 16 . 3}{1 . 2 . 1}$ pf.; endlich td = 2 Rthlr. und ud = 1 Rthlr., ſo wird ze = $\frac{3 . 8 . 16 . 3 . 1}{1 . 2 . 1 . 2}$ pf. = 288 pf. Eben dieſes erhält man nun auch, wenn man ſetzt:

1 . 2 . 1 . 2 : 3 . 16 . 3 . 1 = 8 : 288.

Beweis. Weil m : n = k : v
p : q = v : w
r : ſ = w : x
t : u = x : z (§. 354.)
ſo iſt mprt : nqſu = k : z (§. 401.).

§. 406. Regel de Quinque, Multiplex, Kettenregel.

Erklärung. Die Vorſchrift, wie man für eine gegebene Größe eine andere finden ſoll, wenn ihr Verhältniß aus zwey gegebnen Verhältniſſen gezählter Größen zuſammengeſetzt iſt, heißt die Regel de Quinque. Iſt letzteres aber aus mehr als zwey Verhältniſſen zuſammengeſetzt, ſo heißt ſie, wenn die Glieder ſo, wie im vorigen §., angeordnet werden, die

Regel

Regel multiplex; werden sie hingegen so wie im §. 404. angeordnet, so pflegt man sie die Kettenregel zu nennen.

§. 407.

Zus. Also sind diese beiden Regeln auf jeden Fall anwendbar, der entweder zur Aufgabe §. 404. oder 405. gehört, und sie bestehen zugleich in den daselbst gegebnen Vorschriften.

§. 408.

Die Regel de Quinque ist mit der Regel multiplex oder Kettenregel sowohl in Ansehung der Vorschrift, als der Möglichkeit der Anwendung ganz einerley, und es ist also unnöthig, von ihr besonders zu handeln. Da man mittelst der Kettenregel nur eine einzige Regel de tri nöthig hat, wo man diese sonst etlichemal anbringen müßte, so verschafft sie sowohl als die Regel multiplex eine sehr vortheilhafte Abkürzung im Rechnen. Die Anweisung zu ihrem Gebrauch, die den Rechenmeistern so viel Mühe zu machen pflegt, läßt sich sehr kurz und leicht auf folgende Art geben.

I. In allen Reductionsrechnungen, wo gewisse Größen in andere, ihnen gleiche, verwandelt werden sollen, und in welchen eben die Kettenregel am häufigsten und vortheilhaftesten gebraucht wird, verfährt man am kürzesten so, wie in der Aufgabe §. 404. gezeigt worden, und man hat hier blos folgendes zu bemerken: das erste Glied fängt mit der Zahl derjenigen Größe an, die von eben der Art ist, als die zu verwandelnde; das zweyte Glied endigt allemal mit der Zahl derjenigen Größe, die mit der gesuchten gleichartig ist, und die Zahl der Größen, die in die gesuchte verwandelt werden soll, macht das dritte Glied der Proportion aus.

Exem-

Exempel 1. Wenn 4 Ducaten 11 Rthlr. und 6 Rthlr. 5 Rubel machen, wie viel Rubel machen 100 Ducaten?

Nach der Kettenregel:

4 Duc. = 11 Rthlr.
6 Rthlr. = 5 Rubel
* Rub. = 100 Duc.

Hier fängt man mit der Fragzahl 4 Duc. an, und setzt sie ihrem angegebnen Werthe 11 Rthlr. gleich; mit dieser letzten Zahl, Thaler, fängt man wieder an, und setzt die 6 Rthlr. den 5 Rubeln gleich; und nun sollten die verlangten Rubel kommen, welche den 100 Ducaten gleich sind, diese Stelle bezeichnet man einstweilen mit einem *. Da also hier lauter Verhältnisse der Gleichheit vorkommen, so wird auch $4.6.* = 11.5.100$, und wenn man beiderseits durch 4.6 dividirt, so wird $* = \frac{11.5.100}{4.6} =$ $229\frac{1}{6}$ Rubel = 100 Ducaten.

Oder nach der Regel multiplex:

6 Rthlr. : 11 Rthlr. = 5 Rubel : $\frac{5.11}{6}$ Rubel

4 Duc. : 100 Duc. = $\frac{5.11}{6}$ R. : $\frac{5.11.100}{6.4}$ R.

oder gleich 6.4 : 11.100 = 5 Rub. : $229\frac{1}{6}$ Rubel.

Exempel 2. Wenn 50 Ducaten 102 Bancothaler, 1 Bancothaler 118 gr., und 30 gr. 1 fl. machen, wie viel Ducaten machen 2000 fl.? Da die zu verwandelnde Größe 2000 fl. ist, so ist:

$1.118.102 : 30.1.50 = 2000 : 249\frac{3036}{12036}$ Duc.

Exempel 3. Es soll jemand von St. Petersburg nach Berlin 1000 Rubel übermachen, und will wissen, wie viel selbige in Berlin an Ducaten betra-

gen

gen werden. Es ist nun der Petersburger Cours $47\frac{1}{2}$ Stüber (d. i. 1 Rubel = $47\frac{1}{2}$ holl. Stüber); ferner betragen in Holland 20 Stüber 1 holl. Gulden, und $2\frac{1}{2}$ holl. Gulden machen 1 holl. Spec. Thaler, auch ist der Cours von Holland nach Berlin 142 (d. i. für 100 Spec. Thaler zahlt man in Berlin 142 Reichsthaler, und 1 Duc. gilt in Berlin 3 Reichsthaler). Wenn nun der Banquier nur mit 5 p. Cent Abzug bezahlt (d. i. wenn er statt 105 jedesmal nur 100 giebt), wie viel wird man Ducaten erhalten? Man setze:

$$\begin{array}{rcl} 3\ \text{Rthlr.} : 142\ \text{Rthlr.} &=& 1\ \text{Duc.} : m\ \text{Duc.} \\ 100\ \text{Spthlr.} : 1\ \text{Spthlr.} &=& m\ \text{Duc.} : n\ \text{Duc.} \\ \frac{5}{2}\ \text{fl.} : 1\ \text{fl.} &=& n\ \text{Duc.} : p\ \text{Duc.} \\ 20\ \text{Stüb.} : \frac{95}{2}\ \text{Stüb.} &=& p\ \text{Duc.} : q\ \text{Duc.} \\ 1\ \text{Rub.} : 1000\ \text{Rub.} &=& q\ \text{Duc.} : r\ \text{Duc.} \\ 105 : 100 &=& r\ \text{Duc.} : x\ \text{Duc.} \end{array}$$

also

$$3 \cdot 100 \cdot \frac{5}{2} : 20 \cdot 1 \cdot 105 : 142 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{95}{2} \cdot 1000 \cdot 100 = 1\ \text{Duc.} : x\ \text{Duc.},$$

$$\text{folglich } x = \frac{142 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 95 \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 2}{3 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 1 \cdot 105 \cdot 5} = 428\tfrac{16}{63}\ \text{Ducaten}.$$

Wegen der an den Ganzen hängenden Brüche muß man nach §. 190. 191. verfahren, und wegen Multiplication und Division dieser Brüche sich an die Regeln in §. 176. 178. erinnern, auch kann man, ehe alle Factoren des Zählers und Nenners durch einander multiplicirt werden, in vielen Fällen den §. 187. anwenden. Z. B. in der obigen Rechnung läßt sich 142 oben und 2 unten durch 2 aufheben; ferner 95 oben und 105 unten durch 5; ferner 100 und 100 oben und unten gegen einander; endlich 1000 oben und 20 nebst 5 unten, so daß $x = \frac{71 \cdot 19 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 21 \cdot 1}$.

Exem-

Exempel 4. Wenn 1 Mark fein Silber 13 Rthlr. gilt; 11 Rthlr. 4 Ducaten machen; 68 Ducaten 1 Mark Ducatengold wiegen, und 288 Mark Ducatengold 282 Mk. fein Gold enthalten, wie viel Mk. fein Silber gilt 1 Mk. fein Gold? Da hier die zu verwandelnde Größe 1 Mk. fein Gold ist, so ist

282.1.4.13 : 288.68.11.1 = 1 : 14,6906,
oder: 141.13 : 144.17.11 = 1 : 14,6906,
folglich 1833 : 26928 = 1 : 14,6906 Mk. f. Silber.

Will man sich vor aller Furcht zu fehlen sichern, so kann man anfangs, bis man erst die gehörige Fertigkeit erlangt hat, die gegebnen Gleichungen, so wie §. 404., imgleichen wie im dritten Exempel, ordentlich nach der Reihe hinsetzen:

282 Mk. f. Gold	=	288 Mk. Duc. Gold
1 Mk. Duc. Gold	=	68 Duc.
4 Duc.	=	11 Rthlr.
13 Rthlr.	=	1 Mk. f. Silber
* Mk. f. Silber	=	1 Mk. f. Gold

also 282.1.4.13.* = 288.68.11.1.1,

und daher $\frac{288 \cdot 68 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 1}{282 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 13}$ = * Mk. f. Silber = 14,6906 Mk. f. Silber.

II. In allen übrigen Fällen, wo nicht Größen in andere ihnen gleiche zu verwandeln sind, sondern für gewisse Größen andere, ihnen ungleichartige, gesucht werden, verfährt man nach der Regel multipler §. 405. Hier muß man nun zuerst bey jeder von den gegebnen Größen nach §. 384. und 385. untersuchen, ob ihre Theile den Theilen der gesuchten Größe ordentlich, oder umgekehrt proportional sind; und da, wo der letzte Fall gilt, das Verhältniß der gegebenen Größen, wie in der verkehrten Regel de tri, umkehren. Hat man dieses richtig beurtheilt, so ist das übrige

übrige Verfahren aus §. 405. von selbst klar, und da hier die gegebnen Verhältnisse von einander unabhängig sind, so ist es sogar gleichgültig, in welcher Ordnung man sie folgen läßt.

Exempel 1. Mit 3 Pflügen werden in 2 Tagen 13 Morgen Acker umgepflügt, wie viel Morgen werden mit 10 Pflügen in 7 Tagen umgepflügt werden?

$$\begin{array}{llll} & 3 \text{ Pfl.} : 10 \text{ Pfl.} & = 13 \text{ Morgen} : u \text{ Morgen} \\ & 2 \text{ Tage} : 7 \text{ Tagen} & = u \text{ Morgen} : z \text{ Morgen} \\ \hline \text{also } 6 & : 70 & = 13 \text{ M.} : 151\tfrac{2}{3} \text{ Morgen.} \end{array}$$

Exempel 2. Mit 3 Pflügen werden in 2 Tagen 13 Morgen umgepflügt; wie viel Pflüge gehören dazu, um $151\frac{2}{3}$ Morgen in 7 Tagen zu pflügen? Hier stehen die Pflüge mit den Tagen im umgekehrten Verhältnisse, denn n mal mehr Tage erfordern n mal weniger Pflüge, also ist hier die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{ll} 13 \text{ Morg.} : 151\tfrac{2}{3} \text{ Morg.} & = 3 \text{ Pfl.} : u \text{ Pfl.} \\ 7 \text{ Tage} : 2 \text{ Tage} & = u \text{ Pfl.} : z \text{ Pfl.} \\ \hline \text{also ist } 13 \cdot 7 : 151\tfrac{2}{3} \cdot 2 & = 3 \text{ Pfl.} : z, \text{ d. i. } 10 \text{ Pfl.} \end{array}$$

Exempel 3. Es haben 10 Maurer in 15 Wochen, worin sie 6 Tage und täglich 12 Stunden arbeiteten, eine Mauer verfertiget, welche 400 Fuß lang, 12 Fuß hoch, $3\frac{1}{2}$ Fuß dick war. Wie viel Wochen werden 24 Maurer zubringen, wenn die Mauer 160 Fuß lang, 14 Fuß hoch, $2\frac{1}{2}$ Fuß dick ist, wöchentlich aber nur 5 Tage und täglich 10 Stunden gearbeitet wird? Wenn man nun die Verhältnisse in diesem Exempel einzeln nach §. 384. und 385. untersucht, so findet man, daß diejenigen, welche die Zahl der Arbeiter und der Zeiten, in welchen sie gearbeitet haben, betreffen, umgekehrt, diejenigen aber, welche

die Abmessungen der Mauer betreffen, ordentlich oder direct sind. Wenn man nun noch die ganzen Zahlen, woran Brüche hängen, nach §. 190. 191. ausdrückt, so wird man folgenden Ansatz nach §. 405. erhalten:

24 Maurer	: 10 Maurer	= 15 Wochen	: m W.
5 Tage	: 6 Tagen	= m Wochen	: n W.
10 St.	: 12 St.	= n Wochen	: p W.
400 Länge	: 160 Länge	= p Wochen	: q W.
12 Höhe	: 14 Höhe	= q Wochen	: r W.
$\frac{7}{2}$ Dicke	: $\frac{5}{2}$ Dicke	= r Wochen	: x W.

also $\frac{10.6.12.160.14.5.15.2}{24.5.10.400.12.2.7}$ = x Wochen, oder nach dem Aufheben: $\frac{3}{1}$, folglich x = 3. daß also die Arbeit in 3 Wochen verrichtet werden kann.

Solche zusammengesetzte Verhältnisse können auch bey der Gesellschaftsrechnung vorkommen.

Exempel. Drey Kaufleute handeln in Gesellschaft. Der erste giebt ein Capital von 500 Rthlr. auf 3 Jahre in den Stock; der zweyte eins von 800 Rthlr. auf 2 Jahre, und der dritte eins von 1200 Rthlr. auf 5 Jahre. Sie gewinnen 1000 Rthlr., es fragt sich, wie viel jedem vom Gewinnst gebühre?

Weil nun 3mal 500 Rthlr. in 1 Jahre eben so viel thun, als 1mal 500 Rthlr. in 3 Jahren, so kann man die obigen Beyträge sämmtlich in Gelde anschlagen, und die Zeiten durchaus gleich nehmen, wo sie denn aus der Rechnung weggelassen werden können. Hieraus folgt also, daß man die Capitale in den ihnen zugehörigen Zeiten multipliciren muß, und die Producte alsdenn eben so gebrauchen, wie im §. 389., nemlich:

500

$$500 \cdot 3 = 1500$$
$$800 \cdot 2 = 1600$$
$$1200 \cdot 5 = 6000$$

$$9100 : 1000 = 1500 : 164\tfrac{76}{91}$$
$$= 1600 : 175\tfrac{75}{91}$$
$$= 6000 : 659\tfrac{31}{91}$$

Summa 1000 Rthlr.

6. Von den Progressionen.

§. 409. Steigende, fallende Progression.

Erklärung. Eine Menge Größen, von welchen jede zur nächstfolgenden einerley Verhältniß hat, heißt eine Progression, und jede von den Größen heißt ein Glied der Progression (terminus). Sind die folgenden Glieder größer als die vorhergehenden, so heißt die Progression eine steigende (ascendens); sind dagegen jene kleiner, als diese, so heißt sie eine fallende (descendens).

§. 410. Arithmetische Progression, Differenz.

Erklär. Eine Progression, in welcher jedes Glied zum nächstfolgenden eben dasselbe arithmetische Verhältniß hat, heißt eine arithmetische, z. B. 2, 5, 8, 11, 14, 17 u. s. w., oder 17, 14, 11, 8, 5, 2. Die Differenz des ersten und zweyten Gliedes heißt die Differenz der arithmetischen Progression.

§. 411.

Zus. Da sich also das erste Glied zum zweyten, wie das zweyte zum dritten, wie das dritte zum vierten etc. verhält, und das Verhältniß arithmetisch ist, so heißt eine Menge Größen eine arithmetische Progression, wenn sie nach der Reihe beständig in einer stetigen arithmetischen Proportion fortgehen (§. 330.).

§. 412.

Lehrsatz. Wenn in einer steigenden arithmetischen Progression: a, b, c, e, f etc. die Differenz b — a = d ist, so ist das nte Glied = a + (n — 1) d, z. B. das 2te = a + d; das dritte = a + 2d; das 8te = a + 7d etc. Z. B. 3, 6, 9, 12 etc. 6 — 3 = 3, also etwa das 8te Glied = 3 + (8 — 1) 3 = 3 + 18 = 24.

Beweis. Man setze, der Satz sey von irgend welchen zwey nächsten Gliedern, z. B. vom mten g, und dem m + 1ten h, wahr; so ist er auch vom nächstfolgenden m + 2ten Gliede k, wahr. Denn da g — h = h — k (§. 411.), so ist k = 2h — g (§. 335.). Ist daher g = a + (m — 1) d = a + md — d, und h = a + md, so ist k = 2a + 2md — a — md + d = a + md + d = a + (m + 1) d. Nun ist der Satz vom 2ten Gliede b, und vom 3ten c wahr, denn da b — a = d ist, so ist b = a + d (§. 37.), und da a — b = b — c ist (§. 411.), so ist c = 2b — a (§. 335.) = 2a + 2d — a = a + 2d; also ist er auch vom 4ten Gliede wahr, folglich auch vom 5ten, folglich auch vom 6ten etc., mithin überhaupt von jedem nten Gliede, also ist das nte Glied = a + (n — 1) d.

§. 413.

Lehrsatz. Wenn in einer fallenden arithmetischen Progression: a, b, c, e, f etc. die Differenz a — b = d ist, so ist das nte Glied = a — (n — 1) d. Z. B. 12, 10, 8, 6, 4, wo 12 — 10 = 2, so ist das 6te Glied 12 — (6 — 1) 2 = 12 — 10 = 2.

Beweis. Man setze, der Satz sey von irgend zwey nächsten Gliedern, z. B. vom mten g, und dem m + 1ten h, wahr; so ist er auch vom nächstfolgenden m + 2ten k wahr. Denn da g — h

= h

$= h - k$ (§. 411.), so ist $k = 2h - g$ (§. 335.). Ist daher $g = a - (m - 1) d = a - (md - d)$ $= a - md + d$, und $h = a - md$, so ist $k = 2a - 2md - a + md - d = a - md - d = a - (md + d) = a - (m + 1) d$. Nun ist der Satz vom zweyten Gliede b und dritten c wahr, denn da $a - b = d$ ist, so ist $b = a - d$ (§. 39.), und da $a - b = b - c$ (§. 411.), so ist $c = 2b - a$ (§. 335.) $= 2a - 2d - a = a - 2d$. Also ist er auch vom 4ten Gliede wahr, folglich auch vom 5ten, 6ten u. s. w., und überhaupt von jedem nten, also ist jedes nte Glied $= a - (n - 1) d$.

§. 414.

Aufgabe. Aus dem ersten Gliede, der Differenz und der Zahl der Glieder, das letzte Glied der arithmetischen Progression zu finden.

Auflös. Man multiplicire die Differenz durch die Zahl der Glieder, weniger 1. Ist nun die Progression steigend, so addire man das Product zum ersten Gliede; ist sie aber fallend, so subtrahire man es vom ersten Gliede.

Z. B. die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 etc. machen eine arithmetische Progression, in welcher das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 2$ ist, also die 1000ste ungerade Zahl $= 1 + 2 . 999 = 1999$.

Beweis. Man setze, das erste Glied sey a, die Differenz d, die Zahl der Glieder n, und das letzte Glied z; so ist z das nte Glied, also in der steigenden Progression $z = a + (n - 1) d$ (§. 412.), und in der fallenden $z = a - (n - 1) d$ (§. 413.).

§. 415.

Zus. Wenn daher in einer steigenden Progression das letzte Glied z ist, so ist das vorletzte $z - d$,

das 2te vor dem letzten $z-2d$, das 3te $z-3d$ u. s. w. Denn wenn das letzte z das nte Glied ist, so ist das vorletzte das $n-1$te, also $= a+(n-2)d$ (§. 412.) $= a+(n-1)d-d = z-d$; das 2te vor dem letzten ist das $n-2$te, also $a+(n-3)d = a+(n-1)d-2d = z-2d$ u. s. w.

§. 416.

Zus. Ist hingegen in einer fallenden Progression das letzte Glied z, so ist das vorletzte $z+d$, das 2te vor dem letzten $z+2d$, das 3te $z+3d$ etc. Denn hier ist das vorletzte $= a-(n-2)d$ (§. 413.) $= a-(nd-2d) = a-nd+d+d = a-(n-1)d+d = z+d$, und das 2te vor dem letzten $= a-(n-3)d = a-(n-1)d+2d = z+2d$ u. s. w.

§. 417.

Aufgabe. Aus dem letzten Gliede, der Differenz und der Zahl der Glieder, das erste Glied einer arithmetischen Progression zu finden.

Auflös. Man multiplicire die Differenz durch die Zahl der Glieder, weniger 1. Ist die Progression steigend, so subtrahire man das Produkt vom letzten Gliede; ist sie fallend, so addire man es zu ihm. Z. B. das letzte Glied sey $= 100$, die Differenz $= 5$, und die Zahl der Glieder $= 20$, so ist das erste Glied bey der steigenden Progression $= 100-5.19 = 5$, und bey der fallenden $= 100+5.19 = 195$.

Beweis. Weil in der steigenden Progression $z = a+(n-1)d$, und in der fallenden $z = a-(n-1)d$ (§. 414.), so ist in der erstern $z-(n-1)d = a$ (§. 38.), und in der letztern $z+(n-1)d = a$ (§. 37.).

§. 418.

§. 418.

Aufgabe. Aus dem ersten und letzten Gliede, nebst der Zahl der Glieder, die Differenz der arithmetischen Progression zu finden.

Auflös. Man dividire den Unterschied des ersten und letzten Gliedes durch die Zahl der Glieder, weniger 1. Z. B. das erste Glied sey = 1, das letzte = 100, die Zahl der Glieder auch = 100, so ist die Differenz $= \frac{100 - 1}{99} = 1$.

Beweis. Weil in der steigenden Progression $= a + (n - 1)d$, und in der fallenden $z = a - (n - 1)d$ (§. 414.), so ist in der erstern $z - a = (n - 1)d$ (§. 38.), folglich $\frac{z - a}{n - 1} = d$ (§. 87.), und in der letzten $(n - 1)d = a - z$ (§. 39.), also $d = \frac{a - z}{n - 1}$.

§. 419.

Aufgabe. Aus dem ersten und letzten Gliede, nebst der Differenz, die Zahl der Glieder der arithmetischen Progression zu finden, vorausgesetzt, daß alle Glieder Zahlen sind.

Auflös. Man dividire den Unterschied des ersten und letzten Gliedes durch die Differenz der Progression, und vermehre den Quotienten um 1. Z. B. Ein Stein fällt von einer Höhe in der ersten Secunde durch 15,625 rheinl. Fuß, in jeder folgenden aber 31,25 Fuß tiefer, und in der letzten durch 1859,375 Fuß, es fragt sich, wie viel Secunden sein Fallen gedauert habe? Es ist erstlich $1859,375 - 15,625 = 1843,7525$, ferner: $\frac{1843,7525}{31,25} = 59$, und

$59+1=60$; also hat das Fallen 1 Minute oder 60 Sec. gedauert.

Beweis. Weil in der steigenden Progression $z=a+(n-1)d$, und in der fallenden $z=a-(n-1)d$ (§. 414.), so ist in der erstern $\frac{z-a}{d}=n-1$, also $\frac{z-a}{d}+1=n$, und in der letztern $(n-1)d=a-z$, folglich $n-1=\frac{a-z}{d}$, also $n=\frac{a-z}{d}+1$.

§. 420.

Lehrsatz. Wenn man zu den Gliedern einer arithmetischen Progression, dieselben rückwärts genommen, auf folgende Art addirt: nämlich zum ersten das letzte, zum zweyten das vorletzte, zum dritten das 2te vor dem letzten u. s. w., bis zum letzten das erste, so sind alle diese Summen gleich. Z. B. die Progression sey: 2, 4, 6, 8, 10, 12, so ist $2+12=4+10=6+8=14$.

Beweis. Wenn das erste Glied a, die Differenz d, und das letzte Glied z ist, so ist die steigende Progression diese:

	a,	$a+d$,	$a+2d \ldots\ldots z$	(§. 412.)
rückwärts:	z,	$z-d$,	$z-2d \ldots\ldots a$	(§. 415.)
die Summe	$a+z$,	$a+z$,	$a+z$, $\quad a+z$.	

Eben so ist die fallende:

	a,	$a-d$,	$a-2d \ldots\ldots z$	(§. 413.)
rückwärts:	z,	$z+d$,	$z+2d \ldots\ldots a$	
die Summe	$a+z$,	$a+z$,	$a+z$, $\quad a+z$.	

§. 421.

§. 421.

Zus. Wenn man daher die Summe des ersten und letzten Gliedes so vielmal nimmt, als die Progression Glieder hat, so bekommt man die Summe aller Glieder derselben doppelt; d. i. wenn die Zahl der Glieder n, und ihre Summe s ist, so ist $n(a+z) 2s$. Z. B. in der Progression §. 420. war $a+z=14$, und die Zahl der Glieder $=6$, also $6 \cdot 14 = 84$, folglich die Summe selbst $= 42$.

§. 422.

Aufgabe. Aus dem ersten Gliede, der Differenz und der Zahl der Glieder, die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progression zu finden.

Auflös. Man suche das letzte Glied, und multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes durch die halbe Anzahl der Glieder. Z. B. da die erste ungerade Zahl $= 1$, und die tausendste $= 1999$ ist (§. 414.), so ist die Summe der ersten tausend ungeraden Zahlen $500 \cdot 2000 = 1000000$.

Beweis. Wenn das erste Glied a, die Differenz d, die Zahl der Glieder n, und ihre Summe s ist, so ist $n(a+z) = 2s$ (§. 421.), also $\frac{1}{2}n(a+z) = s$.

§. 423.

Zus. Wenn man daher die ungeraden Zahlen nach der Reihe addirt, so bekommt man nach der Reihe die Quadrate der ganzen Zahlen. Denn da die erste ungerade Zahl $= 1$, und die nte $= 2n - 1$ ist (§. 130.), so ist die Summe des ersten und nten Gliedes $= 2n$, also die Summe von n Gliedern $= 2n \times \frac{1}{2}n = n^2$. Also die Summe der zwey ersten ungeraden Zahlen $= 2^2 = 4$; die Summe der ersten $= 3^2 = 9$; der 4 ersten $= 4^2 = 16$ u. s. w.

§. 424.

Zus. Da 1) $s = \frac{1}{2}n\,(a + z)$, so ist $2s = na + nz$.

Also 2) $z = \frac{2s - na}{n} = \frac{2s}{n} - a$,

3) $a = \frac{2s - nz}{n} = \frac{2s}{n} - z$,

4) $n = \frac{2s}{a + z}$, wenn alle Glieder Zahlen sind.

Wenn also von den vier Größen, n, a, z, s, drey gegeben sind, so kann man durch diese Formeln allemal die vierte finden.

§. 425.

Zus. Da in der steigenden Progression $z = a + (n - 1)\,d$ (§. 414.), folglich $a + z = 2a + (n - 1)\,d$; so ist

1) $s = na + \frac{1}{2}n\,(n - 1)\,d$, also

2) $a = \frac{2s - n\,(n - 1)\,d}{2n} = \frac{s}{n} - \frac{1}{2}(n - 1)\,d$.

Z. B. es sey aus §. 422. $s = 42$, $n = 6$, $d = 2$, so ist $a = \frac{42}{6} - \frac{1}{2} . 5 . 2 = 7 - 5 = 2$.

3) $d = \frac{2s - 2na}{n\,(n - 1)} = \frac{2\,(s - na)}{n\,(n - 1)}$.

Z. B. in den vorigen Ziffern ist $d = \frac{2 . 30}{6 . 5} = 2$.

In der fallenden hingegen ist $z = a - (n - 1)\,d$ (§. 414.), also

1)

1) $s = na - \frac{1}{2}n(n-1)d$, folglich

2) $a = \frac{2s + n(n-1)d}{2n} = \frac{s}{n} + \frac{1}{2}(n-1)d$,

3) $d = \frac{2na - 2s}{n(n-1)} = \frac{2(na-s)}{n(n-1)}$.

Z. B. $s = 42$, $n = 6$, $d = 2$, so ist $a = \frac{42}{6} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 12$.

Wenn daher, nebst der Zahl der Glieder n, von den 3 Größen, a, d, s, zwey gegeben sind, so kann man durch diese Formeln allemal die dritte finden.

§. 426.

Anmerkung. Wie man aber aus dem ersten Gliede a, der Differenz d und der Summe der arithmetischen Progression s, die Zahl der Glieder n, und daher auch das letzte Glied z finden könne, dieses ist eine Aufgabe, die schon außer den Gränzen der gemeinen Arithmetik liegt, und in die Algebra gehört.

§. 427. Geometrische Progression, Nenner.

Erklär. Eine Progression, in welcher jedes Glied zum nächstfolgenden eben dasselbe geometrische Verhältniß hat, heißt eine geometrische. Z. B. 2, 6, 18, 54, 162, 486, etc. oder 486, 162, 54, 18, 6, 2, etc. Die Zahl, durch welche das erste Glied multiplicirt werden muß, um das zweyte zu bekommen, heißt der Nenner der geometrischen Progression, z. B. in der ersten von den beiden angeführten Progressionen ist der Nenner = 3, in der zweyten = $\frac{1}{3}$.

§. 428.

Zus. Da sich also das erste Glied zum zweyten verhält, wie das zweyte zum dritten, ferner das

zweyte

zweyte zum dritten, wie das dritte zum vierten etc., und das Verhältniß geometrisch ist, so heißt eine Menge Größen eine geometrische Progression, wenn sie in einer stetigen geometrischen Proportion fortgehen (§. 363.).

§. 429.

Lehrsatz. Wenn in einer geometrischen Progression a, b, c, d, e, f etc. der Nenner m ist, so ist das nte Glied $= m^{n-1}a$. Z. B. in der Progression 2, 6, 18 etc. ist der Nenner $m = 3$, also das 5te Glied $= 3^4 . 2 = 81 . 2 = 162$, und in der Progression 162, 54 etc. ist der Nenner $m = \frac{1}{3}$, also das fünfte Glied $= (\frac{1}{3})^4 . 162 = \frac{1}{81} . 162 = 2$.

Beweis. Weil das zweyte Glied $b = ma$ (§. 427.) und $a:b = b:c = c:d = d:e = e:f$ etc. (§. 428.), so ist das dritte $c = m^2a$, das vierte $d = m^3a$, das fünfte $e = m^4a$, das sechste $f = m^5a$ u. s. w. (§. 379.), also überhaupt das nte Glied $= m^{n-1}a$.

§. 430.

Aufgabe. Aus dem ersten Gliede a, dem Nenner m und der Zahl der Glieder n, das letzte Glied z der geometrischen Progression zu finden.

Auflös. Man erhebe den Nenner m zu derjenigen Potenz, welche die Zahl der Glieder weniger 1 anzeigt, d. i. zur n — 1ten Potenz (§. 249.), und multiplicire durch dieselbe das erste Glied a. Z. B. $a = 3$, $m = 2$, $n = 5$, so ist $z = 16 . 3 = 48$, wie man sieht, wenn man die Progression selbst aufstellt: 3, 6, 12, 24, 48.

Beweis. Weil das letzte Glied z das nte ist, nach der Voraussf., so ist $z = m^{n-1}a$ (§. 429.).

§. 431.

Aufgabe. Aus dem letzten Gliede z, dem Nenner m, und der Zahl der Glieder n, das erste Glied a der geometrischen Progression zu finden.

Auflös. Man dividire das letzte Glied z durch die n — 1te Potenz des Nenners m, d. i. durch m^{n-1}. Z. B. in voriger Progression wird a, oder 3 gefunden, wenn man 48 durch 16 dividirt.

Beweis. Weil $z = m^{n-1}a$ (§. 430.), so ist $a = \frac{z}{m^{n-1}}$.

§. 432.

Anmerk. Weil $m^{n-1}a = z$ (§. 430.), so ist, wenn a und z Zahlen sind, erstlich $m^{n-1} = \frac{z}{a}$, und zweytens $m = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$. Nach dieser zweyten Formel kann man also aus dem ersten und letzten Gliede und der Zahl der Glieder, auch den Nenner der Progression finden, wenn man aus der gegebnen Zahl $\frac{z}{a}$ die n — 1te Wurzel auszuziehen weiß. Die allgemeine Regel, nach welcher dieses geschehen kann, wird aus der im 5ten Abschn. vorgetragenen Lehre von den Potenzen, in der Algebra hergeleitet. Will man aber vermöge der ersten Formel $m^{n-1} = \frac{z}{a}$ aus dem ersten Gliede a, dem letzten z und dem Nenner m die Zahl der Glieder n finden, so kann selbst die Algebra aus den bisher vorgetragenen Lehren der Arithmetik, für die Zahl n keine Formel ausfindig machen, sondern hierzu ist noch ein besonderes künstliches Zahlensystem

system nöthig, von welchem im folgenden Abschnitte gehandelt, und am Ende desselben die Auflösung selbst gegeben werden soll.

§. 433.

Aufgabe. Aus dem ersten Gliede a, dem Nenner m und der Zahl der Glieder n die Summe aller Glieder der geometrischen Progression zu finden.

Auflös. Man multiplicire das erste Glied a durch die nte Potenz des Nenners m, vom Producte $m^n a$ ziehe man das erste Glied a ab, und die Differenz $m^n a - a$ dividire man durch den um 1 verminderten Nenner, d. i. durch $m - 1$. Z. B. in der Progression 2, 6, 18, 54, 162 ist das erste Glied $a = 2$; der Nenner $m = 3$; die Zahl der Glieder $n = 5$, folglich die Summe aller Glieder $= \frac{3^5 . 2 - 2}{3 - 1}$ $= \frac{243 . 2 - 2}{2} = 242$.

Beweis. Man nenne die Summe aller Glieder f, so ist

$f = a + ma + m^2a \ldots + m^{n-1}a$ (§. 429.), folglich

$mf = ma + m^2a \ldots + m^{n-1}a + m^na$, mithin

$(m-1)f = mf - f = m^na - a$ (indem man die obere Reihe von der untern abzieht),

also $f = \frac{m^na - a}{m - 1}$.

§. 434.

Zus. Da also $(m - 1) f = m^na - a = (m^n - 1) a$, so ist $\frac{m - 1}{m^n - 1} f = a$. Also kann man mittelst dieser Formel auch aus der Summe der Progression f, dem Nenner m, und der Zahl der Glieder

der n das erste Glied a finden. Z. B. $s = 160$, $m = 3$, $n = 4$, so findet sich $a = \frac{2 \cdot 160}{80} = 4$, und es ist die Progression 4, 12, 36, 108.

§. 435.

Zus. Weil $m^n a = m \cdot m^{n-1} a$ (§. 254.), so ist, wenn das letzte Glied z ist, $m^n a = mz$ (§. 430.), also 1) $s = \frac{mz - a}{m - 1}$, folglich $ms - s = mz - a$, mithin $a = s + mz - ms = s - (ms - mz)$ (§. 41.),

2) $a = s - m(s - z)$,

3) $z = \frac{a + (m - 1)s}{m}$.

Da ferner $m(s - z) = s - a$, Nr. 2., so ist

4) $m = \frac{s - a}{s - z}$, wenn a, z, s Zahlen sind.

Wenn daher von den Größen a, z, s, m, drey gegeben sind, so kann man durch diese Formeln allemal die vierte finden. Z. B. in der Progression §. 434. ist

$$s = \frac{3 \cdot 108 - 4}{3 - 1} = 160,$$

$$a = 160 - 3 \cdot 52 = 4,$$

$$z = \frac{4 + 2 \cdot 160}{3} = 108,$$

$$m = \frac{160 - 4}{160 - 108} = 3.$$

§. 436.

Anmerk. Wenn in einer geometrischen Progression die Zahl der Glieder n sehr groß ist, so wird es mühsam, das letzte Glied und die Summe aller Glieder zu finden, weil man den Nenner m zur $n - 1$ten

oder

oder nten Potenz erheben muß. Indessen kann man sich die Rechnung durch den Satz $m^n \times m^r = m^{n+r}$ (§. 284.) sehr erleichtern, indem man z. B. so fort die 20ste Potenz von m bekommt, wenn man die 10te durch sich selbst, die 40ste, wenn man die 20ste durch sich selbst, die 60ste, wenn man die 40ste durch die 20ste multiplicirt u. s. w. Ein Exempel hiervon wird dieses am sichtbarsten zeigen. Man erzählt, daß der Erfinder des Schachspiels, dem ein persischer König eine freye Bitte bewilligt, nur eine gewisse Anzahl Weizenkörner für die 64 Felder des Schachbrets verlangt habe, nemlich für das erste 1 Korn, für das zweyte 2 Körner, für das dritte 4, für das vierte 8, und so immer für das folgende Feld doppelt so viel, als für das nächstvorhergehende. Es fragt sich, wie viel Weizenkörner dieses beträgt? Da dieselben die geometrische Progression: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 u. s. w. machen, wo das erste Glied a = 1, der Nenner m = 2, und die Zahl der Glieder n = 64 ist, so ist die verlangte Summe

$$s = \frac{2^{64}.1 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1.$$

Nun ist $2^{10} = 1024$; diese durch sich selbst multiplicirt, geben $2^{20} = 1048576$. Diese Zahl wieder durch sich selbst multiplicirt, giebt $2^{40} = 1099511627776$. Diese durch die vorige 1048576 multiplicirt, giebt $2^{60} = 1152921504606846976$. Diese durch die vierte Potenz von 2, d. i. durch 16 multiplicirt, giebt, wenn man 1 abzieht, die verlangte $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$.

Was diese Zahl Weizenkörner sagen will, läßt sich bequem auf folgende Art übersehen. Man rechnet 491520 Weizenkörner auf einen englischen Scheffel, also

also macht die gefundene Summe 37529996894754 Scheffel. Nun setze man, der König wäre auch mit dem Philosophen eins geworden, ihm täglich eine Million, also jährlich 365 Millionen Scheffel liefern zu lassen, so hätte die Abtragung der ganzen Summe dennoch 102821 Jahre erfordert.

§. 437.

Anmerk. Die allgemeinen Arten der Verknüpfung zweyer Größen, auf welchen zugleich die Verhältnisse, Proportionen und Progressionen beruhen, sind, wie wir bisher gesehen haben, Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Erhebung zu Potenzen und Ausziehung der Wurzeln, und lassen sich daher in folgenden Sätzen darstellen:

1) $a + b = c$,
2) $a - b = c$,
3) $a \times n = c$,
4) $a : n = c$,
5) $a^n = c$,
6) $\sqrt[n]{a} = c$.

In den 4 ersten von diesen Sätzen kann man, wenn von den drey Größen, a, b, c, oder a, n, c zwey gegeben sind, allemal die dritte finden, nämlich in den beiden ersten durch Addition und Subtraction, und in den beiden letzten durch Multiplication und Division. Im 5ten und 6ten Satze kann man, wenn a und n, oder c und n gegeben sind, c oder a finden, wenn n eine ganze Zahl ist, und die Lehre von der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln auf die übrigen Potenzen erweitert wird. Allein aus

den Zahlen a und c den Exponenten n zu finden, d. i. zu finden, die wievielste Potenz oder Wurzel der gegebnen Zahl a so groß ist, als die gegebne Zahl c, dieses läßt sich durch keine von allen arithmetischen Operationen, die wir bisher betrachtet haben, ausmitteln. Daß dieses aber in der Arithmetik nöthig sey, ist bereits §. 432. bemerkt worden, weil ohne dasselbe in den geometrischen Progressionen gar nicht die Zahl der Glieder n, mithin auch nicht die Zahl der gleichen Verhältnisse $n - 1$, die sie enthält, bestimmt werden kann. Hier ist also noch eine Lücke, und diese wird eben durch die Lehre von den **Logarithmen** ausgefüllt, von welchen jetzt gehandelt werden soll, und deren Wichtigkeit deshalb schon zum voraus einleuchtend ist, weil ohne sie sowohl die gemeine, als höhere Arithmetik, mangelhaft bleiben würde.

7. Von den Logarithmen.

§. 438. Logarithmisches System, Basis, oder Grundzahl.

Erklärung. Wenn jede Zahl y als eine xte Potenz von der gegebnen Zahl a, die nicht $= 1$ ist, betrachtet wird, d. i. wenn jede Zahl $y = a^x$ ist, so heißt der Exponent x der **Logarithmus** von y, oder von a^x. Die Bezeichnung der Logarithmen ist: *log.*, oder schlechthin l, z. B. $x = \log. y = \log a^x$, oder $x = l y = l a^x$. Die Logarithmen, die bey dem ein für allemal bestimmten Werthe der Zahl a einer jeden Zahl zugehören, machen ein **logarithmisches System** aus, und die Zahl a heißt die **Basis**, oder die **Grundzahl** desselben.

§. 439.

Zus. Also ist $la^1 = 1$, $la^2 = 2$, $la^3 = 3$, und überhaupt $la^n = n$. Z. B. wenn man die Grundzahl $a = 10$ setzt, so ist $l\,10 = 1$, $\log. 10^2$ oder $l\,100 = 2$, $l\,10^3$ oder $\log. 1000 = 3$ u. s. w., und überhaupt $l\,10^n = n$.

§. 440.

Zus. Der Logarithmus von 1 ist in jedem System $= 0$, d. i. $l\,1 = 0$; denn da $la^0 = 0$ p. def. und $a^0 = 1$ (§. 287.), so ist $l\,1 = 0$ (§. 6.).

§. 441.

Zus. Wenn man daher unter die geometrische Progression 1 a a^2 a^3 a^4 a^5 u. s. w. die arithmetische 0 1 2 3 4 5 u. s. w. setzt, so sind die untern Zahlen die Logarithmen der obern (§. 439. 440.).

§. 442.

Zus. In jedem System ist jede Zahl $n = a^{l\,n}$. Denn $n = a^x$, und $x = l\,n$ p. def., also $n = a^{l\,n}$ (§. 6.).

§. 443.

Zus. Eine andere Grundzahl giebt auch ein anderes logarithmisches System. Denn man setze, demselben Logarithmen x gehörte im System, dessen Grundzahl a ist, dieselbe Zahl n zu, als im System, dessen Grundzahl b ist, so wäre sowohl $n = a^x$, als $n = b^x$ p. def., folglich $a^x = b^x$, also $a = b$ (§. 263.).

§. 444.

Anmerk. Die Natur der Logarithmen beruht auf der Verbindung einer arithmetischen Zahlenprogression mit einer geometrischen (§. 441.). Wenn man also unter die allgemeine geometrische Progression: c, ac, a^2c, a^3c etc. die allgem. arithm. n, $n+d$, $n+2d$, $n+3d$ etc. setzt, und die untern Zahlen die Logarithmen der obern nennt, so ist $n+xd = \log. a^xc$. Also ist die allgemeinste Definition der Logarithmen diese: Wenn jede Zahl $y = a^xc$ gesetzt wird, so heißt $n+xd$ der Logarithmus von y, oder von a^xc. Allein die Untersuchung der Logarithmen in dieser weitesten Bedeutung gehört in die höhere Mathematik, und ist bisher in dieser kaum angestellt worden; denn in den gewöhnlichen logarithmischen Systemen setzt man $c = 1$, $n = 0$, $d = 1$, und so ist allemal $x = \log. a^x$.

Schon Michael Stiefel hatte eine richtige Idee von den Logarithmen, wie dieses aus seiner Arithmetica integra, Norimb. 1544. Lib. I. Cap. 4. 6. und Lib. III. c. 5. erhellet; allein der erste, der ein wirkliches Logarithmensystem lieferte, war Joh. Neper Baron von Merchiston, ein Schottländer; er gab es im Jahr 1614 zu Edinburgh unter dem Titel heraus: Mirifici logarithmorum canonis descriptio ejusque usus in utraque Trigonometria et omni Logistica mathematica explicatio. In seinem System setzte er $x = \log. a^xc$, und $c = 10\,000\,000$, $a = \frac{9\,999\,999}{10\,000\,000}$.

Uebrigens bedeutet der Name Logarithmus so viel, als ἀριθμος λογων (die Zahl der Verhältnisse).

nisse). Der Grund, warum Neper diesen Namen wählte, war dieser, weil der Logarithmus x anzeigt, wie vielmal das Verhältniß c:ac in dem Verhältnisse $c:a^x c$, d. i. wie vielmal $1:a$ in $1:a^x$ enthalten sey; z. B. da $3 = la^3$ ist, so zeigt der log. 3 an, daß das Verhältniß $1:a^3$ das triplicirte Verhältniß von $1:a$ ist.

§. 445.

Lehrsatz. Wenn in einem logarithmischen System die Grundzahl $a > 1$ ist, so hat eine größere Zahl auch einen größern Logarithmen. Ist hingegen $a < 1$, so hat eine größere Zahl einen kleinern Logarithmen: d. i. wenn $a > 1$, und $n > v$, so ist $ln > lv$; ist aber $a < 1$, so ist $ln < lv$. Z. B. die Grundzahl sey $= 2$, so hat man für die Glieder 1, 2, 4, 8, 16 etc. die Logarithmen 0, 1, 2, 3, 4 etc., ist also $8 > 4$, so ist auch l8 oder 3 > als l4 oder 2. Ist hingegen die Grundzahl $= \frac{1}{2}$, so hat man für die Glieder 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ die Logarithmen 0, 1, 2, 3, 4, also weil $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$, so ist $\log.\frac{1}{4} < \log.\frac{1}{8}$, d. i. $2 < 3$.

Beweis. Weil $n = a^{ln}$, $v = a^{lv}$ (§. 442.), so ist $a^{ln} > a^{lv}$, folglich nicht $ln = lv$, weil sonst $a^{ln} = a^{lv}$ wäre (§. 6.), also entweder $ln < lv$, oder $ln > lv$.

Ist nun aber erstlich $a > 1$, so ist nicht $ln < lv$, denn sonst wäre $lv = ln + d$, folglich $a^{ln} > a^{ln+d}$, d. i. $a^{ln} > a^{ln} a^d$ (§. 284.), folglich $a^d < 1$, und da d sich durch irgend einen Bruch $\frac{n}{r}$ ausdrücken läßt,

 so

so wäre $a^{\frac{n}{r}} < 1$, d. i. $\sqrt[r]{a^n} < 1$ (§. 292.), folglich $a^n < 1^r$ (§. 262.), d. i. $a^n < 1$, also $a < \sqrt[n]{1}$ (§. 264.), d. i. $a < 1$, contra hyp., also ist $l\,n > l\,v$.

Ist dagegen zweytens $a < 1$, so läßt sich auf eben die Art beweisen, daß nicht $l\,n > l\,v$ seyn könne, weil sonst $a > 1$ wäre; also ist in diesem Falle $l\,n < l\,v$.

§. 446.

Zus. Wenn daher die Grundzahl $a > 1$ ist, so ist der Logarithmus einer jeden Zahl, die größer als 1 ist, positiv, der Logarithmus einer jeden aber, die kleiner als 1, d. i. ein ächter Bruch ist, negativ. Ist hingegen $a < 1$, so verhält sich die Sache umgekehrt. Denn $l\,1 = 0$ (§. 440.). Ist daher $a > 1$, so ist, wenn $n > 1$ ist, $l\,n > 0$ (§. 445.), folglich $l\,n = 0 + r$ (§. 18.), also $l\,n$ eine positive Zahl (§. 233.). Ist aber $n < 1$, so ist $l\,n < 0$ (§. 445.), folglich $l\,n + r = 0$ (§. 233.), mithin $l\,n = 0 - r$ (§. 38.), also $l\,n$ eine negative Zahl (§. 233.). Ist hingegen $a < 1$, so ist von selbst klar, daß hier das Gegentheil stattfinden, nämlich daß hier der Logarithmus von jeder Zahl unter 1 positiv, und von jeder Zahl über 1 negativ seyn muß. Z. B. es sey $a = 2$, also $a > 1$, so hat man folgendes Schema:

$$a^r$$

$$\tfrac{1}{8} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8$$

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3$, denn es ist nun 1 anzusehen als a^0; $\frac{1}{2} = a^{-1}$; $\frac{1}{4} = a^{-2}$; $\frac{1}{8} = a^{-3}$.

Hin-

Hingegen wenn $a = \frac{1}{2}$, folglich $a < 1$, so ist

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a^1 & & & \\ 8, & 4, & 2, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{8}, \\ -3 & -2 & -1 & 0 & +1 & +2 & +3, \end{array}$$

wo $a^2 = \frac{1}{4}$; $a^3 = \frac{1}{8}$, dagegen $a^{-1} = 2$; $a^{-2} = 4$; $a^{-3} = 8$, weil diese aus ganzen Zahlen bestehenden Glieder itzt eben so linker Hand neben der Grundzahl stehen, wie vorhin im erstern Schema die Brüche linker Hand standen.

§. 447.

Lehrsatz. Den Logarithmen eines Products bekommt man, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt, d. i. $l\,nv = l\,n + l\,v$, z. B. $l\,15 = l\,3 + l\,5$.

Beweis. Es ist $n = a^{l\,n}$, $v = a^{l\,v}$ (§. 442.), folglich $nv = a^{l\,n} \times a^{l\,v}$ (§. 71.) $= a^{l\,n + l\,v}$ (§. 284.), also $l\,n + l\,v = l\,nv$ (§. 438.).

§. 448.

Zus. Wenn man also erst die Logarithmen der Primzahlen hat, so kann man die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen durch bloße Addition der erstern finden (§. 146.).

§. 449.

Lehrsatz. Den Logarithmen eines Quotienten bekommt man, wenn man den Logarithmen des Divisors vom Logarithmen des Dividends subtrahirt, d. i. $l\frac{n}{v} = l\,n - l\,v$. Z. B. $l\frac{15}{3} = l\,15 - l\,3$.

Beweis. Man setze $\frac{n}{v} = q$, so ist $n = qv$ (§. 87.), folglich $ln = lq + lv$ (§. 447.), also $ln - lv = lq$ (§. 38.) $= l\frac{n}{v}$.

§. 450.

Zus. Also bekommt man den Logarithmen eines Bruchs, wenn man den Logarithmen des Nenners vom Logarithmen des Zählers subtrahirt (§. 157.).

§. 451.

Lehrsatz. Den Logarithmen des Quadrats einer Zahl bekommt man, wenn man ihren Logarithmen durch 2 multiplicirt; den Logarithmen ihres Cubi, wenn man ihren Logarithmen durch 3 multiplicirt, und überhaupt den Logarithmen ihrer nten Potenz, wenn man ihren Logarithmen durch n multiplicirt, d. i. $lv^2 = 2lv$; $lv^3 = 3lv$ etc. $lv^n = nlv$. Z. B. $l4^2 = 2l4$; $l4^3 = 3l4$ etc.

Beweis. Weil $v^2 = v \times v$, $v^3 = v \times v \times v$, $v^n = v \times v \times v \times v \ldots$, so ist $lv^2 = lv + lv$, $lv^3 = lv + lv + lv$ (§. 447.), also bekommt man überhaupt lv^n, wenn man lv nmal zu sich selbst addirt, d. i. durch n multiplicirt, mithin ist $lv^n = nlv$.

§. 452.

Lehrsatz. Den Logarithmen der Quadratwurzel einer Zahl bekommt man, wenn man den Logarithmen der Zahl durch 2 dividirt; den Logarithmen ihrer Cubikwurzel, wenn man ihren Logarithmen durch 3 dividirt, und überhaupt den Logarithmen

men

men ihrer nten Wurzel, wenn man ihren Logarithmen durch n dividirt, d. i. $l\sqrt{m} = \frac{1}{2}lm$; $l\sqrt[3]{m} = \frac{1}{3}lm$; $l\sqrt[n]{m} = \frac{1}{n}lm$. Z. B. $l\sqrt{16} = \frac{1}{2}l16$; $l\sqrt[3]{16} = \frac{1}{3}l16$; $l\sqrt[n]{16} = \frac{1}{n}l16$.

Beweis. Man setze $\sqrt[n]{m} = v$, so ist $m = v^n$, folglich $lm = nlv$ (§. 451.), also $\frac{lm}{n} = lv$, d. i. $l\sqrt[n]{m} = \frac{1}{n}lm$.

§. 453.

Lehrsatz. Wenn v die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen n und m ist, so ist lv die mittlere arithmetische zwischen ln und lm. Z. B. im §. 446. ist im ersten Schema 4 die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 2 und 8, und ihr Logarithmus 2 ist die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen jener ihren Logarithmen 1 und 3.

Beweis. Weil $v^2 = nm$ (§. 373.), so ist $2lv = ln + lm$ (§. 451. 447.), also lv die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen ln und lm (§. 334.).

§. 454. Briggisches, oder gemeines logarithmisches System, Kennziffer, oder Characteristik, Mantissa.

Erklär. Dasjenige logarithmische System, in welchem die Grundzahl $a = 10$ ist, folglich jede Zahl

$y = 10^x$ gesetzt wird, heißt das Briggische, oder das gemeine. Die Logarithmen dieses Systems selbst heißen gleichfalls die Briggischen oder gemeinen, und man drückt jeden durch einen Decimalbruch aus, der gewöhnlich 7 Decimalstellen enthält. Die ganze Zahl, die er enthält, heißt die Kennziffer, oder Characteristik, die Decimalziffern die Mantissa.

§. 455.

Zus. Also ist hier allemal $l\,10^x = x$ (§. 438.), folglich $l\,1 = l\,10^0 = 0$; $l\,10 = l\,10^1 = 1$; $l\,100 = l\,10^2 = 2$; $l\,1000 = l\,10^3 = 3$ u. s. w.

§. 456.

Zus. Wenn man daher unter die geometrische Progression 1, 10, 100, 1000, 10000 etc. die arithmetische 0, 1, 2, 3, 4 etc. setzt, so sind die untern Zahlen die Logarithmen der obern.

§. 457.

Zus. Da hier $a > 1$ ist, so hat eine größere Zahl auch einen größern Logarithmen (§. 445.), und die Logarithmen aller vermischten und ganzen Zahlen, die über 1 betragen, sind positiv, die Logarithmen der ächten Brüche aber sind alle negativ (§. 446.).

§. 458.

Zus. Ein Quotient $\frac{r}{n}$, der kleiner als 1 ist, hat eben denselben Logarithmen, als der umgekehrte Quotient, $\frac{n}{r}$, aber negativ genommen, d. i. $l\frac{r}{n} = -l\frac{n}{r}$. Z. B. $l\,\frac{19}{43{,}28} = -l\,\frac{43{,}28}{19}$. Denn

$l\frac{r}{n}$

$l\frac{r}{n} = lr - ln$ (§. 449.). Da nun $\frac{r}{n} < 1$ p. hyp., so ist $r < n$ (§. 153. 159.), folglich $lr < ln$ (§. 457.), mithin $ln = lr + x$, und $x = ln - lr$, also $l\frac{r}{n} = lr - lr - x = -x = -(ln - lr) = -l\frac{n}{r}$ (§. 449.).

§. 459.

Zus. Also hat jeder Quotient $\frac{1}{n}$, der kleiner als 1 ist, eben den Logarithmen, als der Divisor n, aber negativ genommen, z. B. $l\frac{1}{43,28} = -l43,28$. Denn $l\frac{1}{n} = -l\frac{n}{1} = -ln$ (§. 90.).

§. 460.

Zus. Also hat jeder ächte Bruch eben den Logarithmen, als der umgekehrte Bruch, und jeder Stammbruch eben den Logarithmen, als der Nenner, aber negativ genommen, z. B. $l\frac{4}{7} = -l\frac{7}{4} = -(l7 - l4)$, und $l\frac{1}{7} = -l7$; denn jeder ächte Bruch und Stammbruch ist ein Quotient (§. 157.) und kleiner als 1 (§. 159.).

§. 461.

Zus. Also ist $l\frac{1}{10^n} = -l10^n$ (§. 460.) $= -n$ (§. 455.), nämlich $l\frac{1}{10} = l0,1 = -1$; $l\frac{1}{100} = l0,01 = -2$; $l\frac{1}{1000} = l0,001 = -3$ u. s. w.

§. 462.

§. 462.

Zus. Da also die positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w. die Logarithmen von 10, 100, 1000, 10000 etc. (§. 455.), und die negativen —1, —2, —3, —4 ꝛc. die Logarithmen von 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 sind (§. 461.), so sind die Logarithmen aller Zahlen zwischen 10, 100, 1000 etc. positive vermischte Zahlen, nämlich, wenn man die Mantisse allgemein durch die ganze Zahl r ausdrückt, 1,r; 2,r; 3,r etc.; und die Logarithmen aller Zahlen zwischen 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 ꝛc. sind negative vermischte Zahlen, nämlich —1,r; —2,r; —3,r; —4,r etc. (§. 457.). Da nun ferner 0 = l 1 ist (§. 440.), so ist der Logarithmus jeder Zahl zwischen 1 und 10 ein positiver ächter Bruch 0,r, und der Logarithmus jeder Zahl zwischen 1 und 0,1 ist ein negativer ächter Bruch —0,r. Also haben die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10; zwischen 10 und 100; zwischen 100 und 1000 etc.; imgleichen zwischen 1 und 0,1; zwischen 0,1 und 0,01; zwischen 0,01 und 0,001; zwischen 0,001 und 0,0001 etc. eben dieselbe Kennziffer, als der Logarithmus der erstern von jeden zwey solchen Zahlen. Also ist für jede ganze Zahl von 1 bis 9 die Kennziffer ihres Logarithmen 0; für jede von 10 bis 99 ist sie 1; für jede von 100 bis 999 ist sie 2; für jede von 1000 bis 9999 ist sie 3 u. s. w. Folglich ist für jede ganze Zahl die Kennziffer ihres Logarithmen um 1 kleiner, als die Anzahl ihrer Ziffern. Z. B. da die ganze Zahl 79564 fünf Ziffern hat, so ist die Kennziffer ihres Logarithmen 4. Zugleich erhellet aus dem vorigen, daß sich für jeden Bruch die Kennziffer seines Logarithmen leicht bestimmen läßt, wenn man untersucht, zwischen welche zwey von den angeführten Zahlen der Bruch fällt.

Z. B.

z. B. da der Bruch 43,18 zwischen 10 und 100 fällt, so ist die Kennziffer seines Logarithmen mit der Kennziffer des Logarithmen von 10 einerley, folglich 1, und da ferner der Bruch 0,04318 zwischen 0,1 und 0,01 fällt, so hat sein negativer Logarithmus eben die Kennziffer, welche l0,1 hat, d. i. 1.

§. 463.

Zus. Da $l\,10^n = n$ (§. 455.) und $l\,10^{-n} = l\frac{1}{10^n} = -n$ (§. 461.), so ist $l(r.10^n) = lr + n$ (§. 447.) und $l(r.10^{-n}) = l\frac{r}{10^n} = lr - n$ (§. 449.).

z. B. wenn $l\,19 = 1,2787536$,
so ist $l\,190 = 2,2787536$,
$l\,1900 = 3,2787536$ etc.
Ist $l\,4,318 = 0,6352826$,
so ist $l\,43,18 = 1,6352826$,
$l\,431,8 = 2,6352826$,
$l\,4318 = 3,6352826$,
$l\,43180 = 4,6352826$.
Ist hingegen umgekehrt $l\,4318 = 3,6352826$,
so ist $l\,4,318 = 3,6352826 - 3 = 0,6352826$,
$l\,0,4318 = 3,6352826 - 4 = 0,6352826 - 1$,
$l\,0,004318 = 0,6352826 - 6 = 0,6352826 - 3$.

§. 464.

Aufgabe. Den Briggischen Logarithmen einer jeden Zahl so genau, als man will, z. B. auf 7 Decimalstellen, zu finden.

Auflös. Da $l\,1 = 0$, und $l\,10 = 1$, so suche man zwischen 1 und 10 die mittlere geometrische Proportionalzahl: 3,1622776 . . . (§. 377.), und

zwischen 0 und 1 die mittlere arithmetische: 0,5000000 (§. 336.), alsdenn ist die letztere Zahl der Logarithmus der erstern (§. 453.). Gesetzt nun z. B. man will $l5$ suchen, so sucht man wieder zwischen 3,1622776 und 10 die mittlere geometrische Proportionalzahl: 5,6234132, und zwischen 0,5 und 1 die mittlere arithmetische: 0,7500000. Mit den Zahlen 3,1622776 und 5,6234132 und ihren Logarithmen 0,5 und 0,75 verfahre man eben so, und setze dieses Verfahren überhaupt so lange fort, bis man auf die mittlere geometrische Proportionalzahl 5,0000000 und ihren Logarithmen 0,6989700 kommt.

Hat man erst $l5$, so kann man leicht $l2$, $l4$ und $l8$, imgleichen $l20$, $l40$, $l80$ etc. bekommen, weil $l2 = l\frac{10}{5} = l10 - l5$; ferner $l4 = l2^2 = 2l2$, und $l8 = l2^3 = 3l2$, imgleichen $l20 = 1 + l2$; $l40 = 1 + l4$ etc. ist.

Auf gleiche Art, wie man $l5$ suchte, läßt sich auch $l7$ und $l3$, und aus diesem $l6 = l2 \times 3 = l2 + l3$, wie auch $l9 = l3^2 = 2l3$ finden.

Eben so darf man in Ansehung der Zahlen zwischen 10 und 20 nur die Logarithmen für die Primzahlen 11, 13, 17, 19; zwischen 20 und 30 nur für 23, 29 suchen u. s. w., weil sich aus den Logarithmen der Primzahlen, die für die zusammengesetzten, ohne viele Mühe ergeben.

§. 465. Geschichte der Logarithmen.

Anmerk. Auf diesem mühsamen Wege sind die Briggischen Logarithmen wirklich gesucht worden. Neper sah in der Folge ein, daß er seine Logarithmen

men zum Gebrauche bequemer hätte einrichten können. Heinrich Brigg, Professor der Geometrie zu Oxford, unternahm daher auf sein Gutbefinden eine neue Berechnung derselben für die Grundzahl 10, und lieferte in seiner Arithmetica logarithmica 1624. die Logarithmen für die ganzen Zahlen von 1 bis 20000, und von 90000 bis 100000. Die Lücke von 20000 bis 90000 aber füllte Adrian Vlacq, ein holländischer Mathematiker in Gouda, in seiner Arithmetica logarithmica, Briggii 1628. aus. Heut zu Tage hat man, mittelst der höhern Mathematik weit kürzere Wege, die Logarithmen zu finden, und Hr. Prof. Bürja hat in seinem selbstlernenden Algebraisten, Berlin und Libau 1786, eine Methode gezeigt, welche die Berechnung der Logarithmen sehr erleichtert.

Die beste Ausgabe der logarithmischen Tafeln sind die Scherwinschen, London 1742, welche die Briggischen und Vlacquischen Logarithmen von 1 bis 101000 enthalten, und sehr bequem eingerichtet sind. Man hat zu Avignon 1774. eine neue Auflage derselben besorgt, und dabey noch verschiedene neue Einrichtungen getroffen. Jetzt haben wir wohlfeilere Ausgaben derselben in Joh. Carl Schulze Sammlung mathematischer Tafeln, Berlin 1778, und in Georg Vega logarithmischen, trigonometrischen und andern Tafeln, Wien 1783. In diesen größern Tafeln wird auch zugleich ihr Gebrauch gezeigt. Die kleinern logarithmischen Tafeln von Vlacq, Wolf etc. gehen nur bis 10000. Indessen läßt sich ihr Gebrauch bey Rechnungen, die nicht eben die größtmögliche Schärfe erfordern, auch auf größere Zahlen ausdehnen, wie wir jetzt sehen werden.

§. 466.

Aufgabe. Mittelst der kleinern Tafeln den Logarithmen einer Zahl zu finden, die über 4 Ziffern enthält, z. B. wenn ihre Ziffern 8375624 sind.

Auflös. 1) Man betrachte die 4 ersten Ziffern als eine ganze Zahl, und die übrigen als einen ächten Decimalbruch, z. B. 8375,624. 2) Man suche die Differenz zwischen dem Logarithmen der ganzen Zahl und dem nächstfolgenden. Z. B.

$$
\begin{array}{rl}
l8376 = & 3,9230367 \\
l8375 = & 3,9229848 \\
\hline
\text{Differenz} = & 519.
\end{array}
$$

Da nun diese Differenz zwischen den Logarithmen der beiden nächsten ganzen Zahlen nur klein, nämlich 0,0000519 ist, so kann man annehmen, daß die Logarithmen der Decimaltheile zwischen 8375 und 8376 diesen selbst beynahe proportional sind. Man suche also 3) zu 1, dem angenommenen ächten Decimalbruch, und der No. 2. gefundenen Differenz die vierte geometrische Proportionalzahl (§. 376.), und addire diese zum Logarithmo der ganzen Zahl, so hat man den Logarithmen der vermischten Zahl 8375,624. Man mache daher die Kennziffer desselben um 1 kleiner, als die Anzahl der Ziffern in der gegebnen Zahl beträgt, so hat man ihren verlangten Logarithmen (§. 462. 463.).

Z. B. 1 : 0,624 = 519 : 324.

$$
\begin{array}{rl}
 & 3,9229848 \\
+ & 324 \\
\hline
\log. 8375,624 = & 3,9230172, \text{ folglich} \\
l8375624 = & 6,9230172 \\
l83,75624 = & 1,9230172 \text{ u. s. w.}
\end{array}
$$

§. 467.

§. 467.

Aufgabe. Die Zahl zu finden, die einem Logarithmo zugehört, der nicht genau in den Tafeln vorkommt.

Auflös. 1) Ist die Kennziffer der gegebnen Logarithmen kleiner als 3, so suche man unter der Kennziffer 3 den Logarithmen auf, dessen Mantisse zunächst kleiner ist, als die im gegebnen. Die Zahl, die diesem zugehört, betrachte man als einen Decimalbruch, in welchem die Anzahl der Ziffern vor dem Comma um 1 größer ist, als die Kennziffer des gegebnen Logarithmen (§. 462. 463.).

Z. B. es sey der gegebne Logarithmus 1,8847425, so ist die Zahl für den Logarithmen, dessen Mantisse mit der Kennziffer 3 zunächst kleiner ist, 7669, also ist die Zahl, die dem gegebnen Logarithmen zugehört, 76,69.

2) Ist aber im gegebnen Logarithmen schon die Kennziffer 3, oder größer als 3, so betrachte man sie als 3. Nun suche man in den Tafeln die Zahl auf, die dem nächstkleinern Logarithmo zugehört, ziehe diesen erst vom gegebnen, und dann vom nächstgrößern ab, und suche zur zweyten Differenz, zur ersten, und zu 1 die vierte geometrische Proportionalzahl. Alsdenn setze man ihre Ziffern zur gefundenen Zahl, und betrachte wieder diese Zahl als einen Decimalbruch, in welchem die Anzahl der Ziffern vor dem Comma um 1 größer ist, als die Kennziffer der gegebnen Logarithmen beträgt, so hat man die Zahl, die dem gegebnen Logarithmen zugehört. Z. B. es sey der gegebne Logarithmus 3,2110627,
so ist in den Tafeln der nächst-
kleinere: 3,2108534 = 1625,
erste Differenz = 2093,

die nächstgrößern $3,2111205 = l1626$
$3,2108534 = l1625,$

zweyte Differenz $2671,$

$$2671 : 2093 = 1 : 0,783,$$

also die gesuchte Zahl für den gegebnen Logarithmen $= 1625,783$.

Wäre der gegebne Logarithme $5,2110627$, so wäre die ihm zugehörige Zahl $= 162578,3$.

§. 468.

Aufgabe. Den Logarithmen eines gegebnen ächten Bruchs, z. B. $\frac{4}{7}$, oder $0,003456$, zu finden.

Auflös. 1) Ist der Bruch ein gemeiner, so subtrahire man den Logarithmen des Zählers vom Logarithmen des Nenners, so ist die Differenz, negativ genommen, der verlangte Logarithme (§. 460.).

Z. B.
$$\begin{aligned} l7 &= 0,8450980 \\ l4 &= 0,6020600 \\ \hline l\tfrac{4}{7} &= -0,2430380. \end{aligned}$$

2) Ist der gegebne Bruch ein Decimalbruch, so ziehe man den Logarithmen der Zahl, die er enthält, von der Anzahl seiner Decimalstellen ab, und nehme die Differenz negativ.

Z. B. im Bruche $0,003456$ sind 6 Decimalstellen, folglich $6,0000000$

$$\begin{aligned} l3456 &= 3,5385737 \\ \hline l0,003456 &= -2,4614263. \end{aligned}$$

Beweis. Es ist $l0,003456 = l\frac{3456}{1000000}$
$= -(l1000000 - l3456)$ (§. 460.)
$= -(6 - l3456)$.

Oft

Oft ist es bequem, den Logarithmen eines ächten Decimalbruchs so auszudrücken, daß man blos den Logarithmen der Zahl, die er enthält, nimmt, und anzeigt, daß die Anzahl seiner Decimalstellen davon subtrahirt werden soll. Z. B. $l\,0{,}003456 = -(6 - l\,3456)$ p. dem. $= +l\,3456 - 6$ (§. 228.) $= 3{,}5385737 - 6 = 0{,}5385737 - 3$.

Beym gemeinen Bruch, z. B. $\frac{4}{7}$, darf man im Logarithmo des Zählers nur die Kennziffer um eine solche Zahl n vergrößern, daß derselbe größer wird, als der Logarithme des Nenners, alsdenn den letztern vom erstern abziehen, und hinter die Differenz — n setzen.

Z. B. $l\,4 = 0{,}6020600 = 2{,}6020600 - 2$

$$\begin{array}{ll} l\,7 & = 0{,}8450980 \\ \hline l\,\frac{4}{7} & = 0{,}7569620 - 1. \end{array}$$

§. 469.

Aufgabe. Den ächten Bruch zu finden, der einem gegebnen negativen Logarithmen zugehört.

Auflös. Man suche die ganze Zahl, die dem Logarithmo, als positiv betrachtet, zugehört, so ist sie der Nenner des Stammbruchs, der dem gegebnen negativen Logarithmo zugehört. Z. B. es sey der negative Logarithmus $-2{,}8567289$, so ist $2{,}8567289 = l\,719$, also $-2{,}8567289 = l\,\frac{1}{719}$ (§. 460.). Will man aber statt des Stammbruchs den Decimalbruch haben, so subtrahire man den gegebnen Logarithmen, als positiv betrachtet, von der Summe seiner Kennziffer n und der Zahl 4, suche für den Logarithmen, der übrig bleibt, die ihm zugehörige Zahl, so ist der Decimalbruch von n + 4 Stellen, in welchem

chem diese Zahl die niedrigsten Stellen einnimmt, der verlangte.

Z. B. es sey der negative Logarithme — 2,8567289, so ist 6,0000000

$$\begin{array}{r} 6,0000000 \\ 2,8567289 \\ \hline 3,1432711. \end{array}$$

Die zu diesem Logarithmen gehörige Zahl fällt zwischen 1390 und 1391, also ist der verlangte Decimalbruch = 0,001390.

Beweis. Es ist $-2,8567289 = +6 - 2,8567289 - 6 = 3,1432711 - 6 = l\,1390 - l\,1000000 = l\,\frac{1390}{1000000}$ (§. 450.) $= l\,0,001390$.

§. 470. Allgemeiner Gebrauch der Logarithmen.

Lehrsatz. Mittelst der Logarithmen verwandelt sich das Multipliciren in Addiren, das Dividiren in Subtrahiren, das Erheben zur nten Potenz in Multipliciren durch n, das Ausziehen der nten Wurzel in Dividiren durch n.

Beweis. Denn wenn man, statt Zahlen zu multipliciren, oder zu dividiren, ihre Logarithmen addirt, oder von einander subtrahirt, und statt eine Zahl zur nten Potenz zu erheben, oder die nte Wurzel aus ihr auszuziehen, ihren Logarithmen durch n multiplicirt, oder dividirt, so bekommt man jedesmal den Logarithmen der gesuchten Zahl (§. 447 - 452.). Sucht man also denselben in den Tafeln auf, so ist die Zahl, die ihm zugehört, die gesuchte Zahl.

Z. B. im Exempel §. 436. war die verlangte Anzahl Weizenkörner $= 2^{64} - 1$. Nun ist $l\,2^{64} = 64\,l\,2 = 0,3010300 \times 64 = 19,2659200$, folglich

lich hat die ganze Zahl, welche diesem Logarithmo zugehört, 20 Ziffern, mithin da 3,2659200 = l 1844,674 ist, so ist

$$2^{64} = 18'''446740''000000'000000.$$

Soll man aus 9352 die Cubikwurzel ausziehen, so ist ihr Logarithmus $= l\frac{9352}{3} = \frac{3,9709045}{3} =$ 1,3236348, also sie selbst = 21,06.

Ein anderes Exempel:

Man soll $\sqrt[5]{\frac{7329^3}{1984^2}}$ finden:

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 7329 = & 3.8650447 \\ \text{mult. mit} & 3 \\ \hline & 11.5951341. \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 1984 = & 3.2975417 \\ \text{mult. mit} & 2 \\ \hline & 6.5950834. \end{array}$$

Nun subtrahire man dieses doppelte von jenem dreyfachen, so bleibt 5.0000507, dieses dividirt durch 5) 1.0000101, dieses ist der Logarithmus der verlangten Wurzel, welche etwas größer als 10 ist.

§. 471.

Zus. Wenn man daher zu drey Zahlen die 4te geometrische Proportionalzahl verlangt, so darf man nur die Logarithmen der zweyten und dritten addiren, und von der Summe den Logarithmen der ersten subtrahiren, alsdenn hat man den Logarithmen der vierten, und kann diese in den Tafeln aufsuchen (§. 376.).

Z. B. 13913 Pariser Fuß geben beynahe 14400 Rheinländische, wieviel giebt 1 Pariser Fuß in Rheinländischem Maaße?

$$13913 : 14400 = 1 \text{ Par. Fuß} : x$$

$$\log. 14400 = 4.1583625$$
$$\log. 1 = 0.0000000$$
$$\log. 14400 + \log. 1 = 4.1583625$$
$$\log. 13913 = 4.1434207$$
$$\log. x = 0.0149417.$$

Dieser log. gehört zu 1,035, also beträgt 1 Par. Fuß beynahe $1\frac{35}{1000}$ Rheinländische.

Setzt man umgekehrt:

$$14400 : 13913 = 1 \text{ Rheinl. Fuß} : z,$$

so ist $4.1434207 - 4.1583625 = 0.9850583 - 1$, welcher zu 0,9662 gehört, daß also 1 Rheinl. Fuß $\frac{9662}{10000}$ Pariser beträgt $= z$.

§. 472.

Zus. Will man die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen zwey Zahlen finden, so darf man nur ihre Logarithmen addiren, und die Summe durch 2 dividiren. Der Quotient giebt den Logarithmen für die gesuchte Zahl, die man also in den Tafeln auffinden kann (§. 377.).

Z. B. man verlangt die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 144 und 576, so ist

$$l\,144 = 2.1583625$$
$$l\,576 = 2.7604225$$
$$4.9187850$$
$$\text{div. } 2) \overline{2.4593925.}$$

Dieser Logarithme gehört zu 288, welches also die verlangte Zahl ist.

§. 473.

Aufgabe. Zu finden, die wievielste Potenz von m eine gegebne Zahl r sey, d. i. in der Gleichung $m^x = r$ den Exponenten x zu finden.

Auflös. Man dividire $l\,r$ durch $l\,m$, so hat man x.

Beweis. Denn wenn $x = \frac{l\,r}{l\,m}$ ist, so ist $x\,l\,m = l\,r$, also $m^x = r$ (§. 470.).

Z. B. die wievielste Potenz von 3 ist 6561?

$$x = \frac{l\,6561}{l\,3} = \frac{3,8169700}{0,4771213} = 8.$$

§. 474.

Aufgabe. Zu finden, die wievielste Wurzel von n eine gegebne Zahl p sey, d. i. in der Gleichung $\sqrt[x]{n} = p$ den Exponenten x zu finden.

Auflös. Man dividire $l\,n$ durch $l\,p$, so hat man x.

Beweis. Wenn $x = \frac{l\,n}{l\,p}$, so ist $x\,l\,p = l\,n$, folglich $l\,p = \frac{l\,n}{x}$, also $p = \sqrt[x]{n}$ (§. 470.).

Z. B. die wievielste Wurzel von 6561 ist die Zahl 3? $x = \frac{l\,6561}{l\,3} = \frac{3,8169700}{0,4771213} = 8.$

Oder: im §. 432. war $m = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$, gesetzt also, eine geometrische Progression habe 7 Glieder, von

welchen das erste 1 und das letzte 15625 ist, es fragt sich, wie groß der Nenner in derselben ist. Man nehme $l\frac{15625}{1} = 4.1938200$, und dividire denselben durch $7 - 1 = 6$, so erhält man $lm = 0.6989700$, welcher zu 5 gehört, also $m = 5$.

Will man den Werth von n finden, so ist $z = m^{n-1}a$ (§. 429. 430.), also $lz = (n-1)lm + la$ (§. 447. 451.) $= nlm - lm + la$, folglich

$$\frac{lz + lm - la}{lm} = n.$$

Nämlich

$$\begin{array}{rl} l15625 & = 4.1938200 \\ l5 & = 0.6989700 \\ \hline lz + lm & = 4.8927900 \\ l1 & = 0.0000000 \\ \hline \end{array}$$

$lz + lm - la = 4.8927900$, diesen durch $lm = 0.6989700$ dividirt, giebt $7 = n$.

V — t.

Ende der Arithmetik.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Der Mathematiker, Oder Compendiöse Bibliothek des Wissenswürdigsten aus der Größenlehre

Bd.: 1/3.

Eisenach [u.a.] 1796

Enc. 18-16,1/3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10400371-6
VD18 80276660-001